

**FACULDADE DE TECNOLOGIA DE SÃO PAULO – FATEC-SP**  
**CURSO DE MATERIAIS, PROCESSOS E COMPONENTES**  
**ELETRÔNICOS**

**Vinicius Henrique Silva Rodrigues**

**Sólitons e o Efeito Josephson**

**SÃO PAULO**

**Dezembro/2013**

**Vinicius Henrique Silva Rodrigues**

**SÓLITONS E O EFEITO JOSEPHSON**

Trabalho de conclusão do Curso, apresentado para obtenção do grau de TECNÓLOGO no Curso de Tecnologia em Materiais, Processos e Componentes Eletrônicos da Faculdade de Tecnologia de São Paulo, FATEC-SP.

Orientador. Prof. Dr<sup>a</sup>. Regina Maria Ricotta

**SÃO PAULO**

**2013**

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a Jeová Deus que me fortaleceu e me deu condições de continuar e concluir mais essa etapa da vida.

Agradeço ao apoio e dedicação dos meus pais Francisco de Assis Rodrigues e Elizabete da Silva Rodrigues que com toda paciência e amor que só verdadeiros pais sabem dar e me ajudaram em todos os momentos da vida.

À minha orientadora Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Regina Maria Ricotta pela confiança e ensinamentos valiosos ao longo deste trabalho.

Aos grandes amigos Rocha, Socorro, Ademar e Marli pelo apoio e incentivo ao longo da vida e pelos seus conselhos que me ajudaram a ter uma direção na vida.

Pelo apoio e motivação ao longo do curso agradeço ao Elton, Giordano, Prof.<sup>a</sup> Me.<sup>a</sup> Silvia Wapke Graf, Tiago Moura.

Ao CNPq e à Fatec-SP.

*É preciso amar as pessoas  
Como se não houvesse amanhã  
Porque se você parar pra pensar  
Na verdade não há*

**Renato Russo**



## Resumo

Mediante as excelentes propriedades e características dos materiais supercondutores pretende-se neste trabalho analisar e dominar as equações e soluções diferenciais que regem seu comportamento no que se refere à propagação de sólitons na forma de fluxons nas junções Josephson. Apresentamos características dispersivas e não-lineares de fenômenos ondulatórios, aplicando esses conceitos na propagação de sólitons em linhas e redes de transmissão elétrica, destacando-se, em última análise como se dá sua propagação em junções do tipo Josephson. Alguns princípios fundamentais da mecânica quântica foram necessários, bem como certas propriedades dos materiais supercondutores.

No capítulo 2 tratamos de princípios básicos sobre propagação de ondas bem como suas principais propriedades físicas. Ainda neste capítulo vemos uma abordagem detalhada sobre dispersão e não-linearidade em sistema elétricos, culminando na dedução clássica da equação de KdV para descrever a propagação de sólitons. Na sequência vemos uma abordagem sucinta sobre mecânica quântica e algumas propriedades principais dos supercondutores essenciais para a melhor compreensão da propagação de ondas solitônicas por meio de fluxons em junções do tipo Josephson.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 PERFIL NO REFERENCIAL INICIAL. (A) PERFIL INSTANTES DEPOIS; COM $G(x',0) = Y(x,0)$ . (B).....	14
FIGURA 2 PACOTE DE ONDA COM VELOCIDADE DE GRUPO DADA PELA EQUAÇÃO (9) . ....	18
FIGURA 3 DISPERSÃO DO PACOTE DE ONDAS À MEDIDA QUE ESTE SE PROPAGA. ....	21
FIGURA 4 LINHA DE TRANSMISSÃO ELÉTRICA LINEAR NÃO DISSIPATIVA. ....	23
FIGURA 5 APROXIMAÇÃO POR TAYLOR DE UM PONTO $x=a$ , ONDE $a$ É O INTERVALO ABERTO DE CONVERGÊNCIA $x$ . ....	24
FIGURA 6 LINHA DE TRANSMISSÃO ELÉTRICA LINEAR, DISPERSIVA E NÃO DISSIPATIVA.....	29
FIGURA 7 REDE DE TRANSMISSÃO ELÉTRICA LINEAR NÃO DISSIPATIVA. ....	32
FIGURA 8 CIRCUITO EQUIVALENTE PARA UMA REDE ELÉTRICA NÃO-LINEAR DISPERSIVA. ....	44
FIGURA 9 SÓLITON UNIDIMENSIONAL. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (55).....	46
FIGURA 10 DENSIDADE DE PROBABILIDADE NORMALIZADA. ....	48
FIGURA 11 INTERFERÊNCIA ENTRE FEIXES DE ELÉTRONS. ....	52
FIGURA 12 LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO. ....	56
FIGURA 13 DIFRAÇÃO DE ELÉTRONS. ....	58
FIGURA 14 DIFERENÇA ENTRE OS CAMINHOS PERCORRIDOS PELOS ELÉTRONS DO FEIXE 1 E 2. ....	60
FIGURA 15 ARRANJO LINEAR DE ÁTOMOS IGUALMENTE ESPAÇADOS. ....	62
FIGURA 16 DENSIDADE DE CORRENTE ELÉTRICA NUM FIO CONDUTOR. ....	65
FIGURA 17 SUPERCONDUTOR. ....	68

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>SÓLITONS: PRINCÍPIOS FÍSICOS .....</b>	<b>14</b>
2.1	ONDAS E DEFINIÇÕES .....	14
2.1.1	<i>Velocidade de grupo.....</i>	<i>17</i>
2.1.2	<i>Princípio de Superposição.....</i>	<i>18</i>
2.2	SÓLITONS .....	19
2.2.1	<i>Dispersão.....</i>	<i>19</i>
2.2.2	<i>Não-linearidade.....</i>	<i>21</i>
2.2.3	<i>Equação de KdV.....</i>	<i>22</i>
2.3	SÓLITONS EM REDES DE TRANSMISSÃO .....	22
2.3.1	<i>Onda Linear Não Dissipativa em Linha de Transmissão .....</i>	<i>23</i>
2.3.2	<i>Solução para Equação de Onda Linear .....</i>	<i>27</i>
2.3.3	<i>Potência e Densidade de Energia da Onda.....</i>	<i>28</i>
2.4	DISPERSÃO .....	29
2.4.1	<i>Dispersão em rede .....</i>	<i>32</i>
2.4.2	<i>Dispersão de um “Pacote” de Ondas.....</i>	<i>35</i>
2.4.3	<i>Abertura do Pacote de Ondas por Dispersão Induzida.....</i>	<i>40</i>
2.5	CIRCUITO NÃO-LINEAR.....	42
2.6	DISPERSÃO E NÃO-LINEARIDADE: SÓLITONS.....	44
<b>3.</b>	<b>SUPERCONDUTIVIDADE: CONCEITOS DA MECÂNICA QUÂNTICA .....</b>	<b>47</b>
<b>3.1.</b>	<b>FUNÇÃO DE ONDA .....</b>	<b>47</b>
3.2.	OPERADORES QUÂNTICOS .....	48
3.2.1.	<i>Momentum.....</i>	<i>48</i>
3.2.2.	<i>Energia Cinética .....</i>	<i>49</i>
3.2.3.	<i>Energia.....</i>	<i>50</i>
3.3.	EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER .....	51
3.3.1.	<i>Equação de Schrödinger Independente do Tempo .....</i>	<i>53</i>
3.3.2.	<i>Equação de Schrödinger num Meio Magnético .....</i>	<i>55</i>
3.3.2.1.	<i>Potencial Vetor em Sistemas Quânticos .....</i>	<i>55</i>
3.3.2.2.	<i>Difração de Elétrons.....</i>	<i>58</i>
3.3.2.3.	<i>Elétron sob Influência Magnética.....</i>	<i>62</i>
3.3.3.	DENSIDADE DE CORRENTE ELÉTRICA E A DENSIDADE DE PROBABILIDADE .....	65
3.4.	SÓLITONS E O EFEITO JOSEPHSON .....	67
3.4.1.	<i>Junção Josephson.....</i>	<i>67</i>
3.4.1.1.	<i>Junção Pontual e Estendida .....</i>	<i>71</i>
3.4.1.2.	<i>Flúxon .....</i>	<i>73</i>
	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>75</b>
	<b>ANEXO A: POLINÔMIO DE TAYLOR SEM RESTO .....</b>	<b>77</b>
	<b>ANEXO B: VISÃO GERAL SOBRE SÉRIE E TRANSFORMADA DE FOURIER .....</b>	<b>79</b>
	<b>ANEXO C: APROXIMAÇÕES DISCRETAS PARA A EVOLUÇÃO TEMPORAL DOS ESTADOS QUÂNTICOS DE UM ELÉTRON SOB INFLUÊNCIA MAGNÉTICA .....</b>	<b>83</b>
	<b>ANEXO D: DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE.....</b>	<b>85</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>87</b>





## 1 Introdução

Os efeitos ondulatórios são amplamente estudados no âmbito científico, [1], [2]. Suas abordagens vão desde uma onda aparentemente simples propagando-se na superfície de um lago até fenômenos mais complexos como a propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais, como por exemplo, em fibras ópticas. Em suas mais variadas formas de manifestação seguem um mesmo princípio fenomenológico o qual é descrito por uma equação diferencial parcial de segunda ordem, no caso de onda linear, sendo que em alguns casos mais específicos aparecem termos que tornam a análise desses efeitos mais eficaz, como quando tratamos de ondas não-lineares, dissipativas, dispersivas ou quando lidamos com efeitos mais complexos onde essas formas coexistem. É com respeito a este último caso que iremos trabalhar em nosso projeto. Mais especificamente com fenômenos ondulatórios que justificam a definição de sólitons, a saber: não-linearidade e dispersão. A palavra sólitons refere-se às ondas solitárias e nos remete a um significado bem característico, ou seja, além de ser uma onda localizada ela apresenta propriedades de matéria. Isso se dá pelo fato de que no caso de uma colisão entre dois sólitons com propagação em sentidos opostos ambas as ondas saíram sem deformação no perfil. Sendo assim, o interesse nesse fenômeno dá-se exatamente por conta dessa característica, principalmente quando pensamos em eficiência na transmissão de sinais eletromagnéticos. A ideia da existência de um fenômeno cujas propriedades nos permitem elevar o nível de excelência no que diz respeito à tecnologia de transmissão e processamento de dados evidentemente traz grandes interesses técnico-econômicos para a indústria tecnológica. Essas ondas já têm aplicações em transmissão de dados por fibra óptica em longas distâncias, em redes elétricas como princípio de funcionamento de osciladores de linhas de transmissão não linear, em sistemas biológicos e, para o nosso caso, em sistemas quânticos como no caso da supercondutividade [3][4][6].

Em meados do século 19 John Scott Russell, um engenheiro naval escocês, observou um curioso fenômeno ondulatório, hoje conhecido como Onda Solitária ou Sóliton. Durante alguns anos cientistas renomados refutaram a idéia de que esta onda possuía características distintas das que até então eram observadas. Para eles era impossível que uma onda comportasse, ao mesmo tempo, dois fenômenos de natureza

diferentes – dispersão e não linearidade – de forma que seu perfil se mantivesse constante ao se propagar. Russell observou algo nada convencional para a época. Além do mais, o fato de aquele efeito ondulatório percorrer uma grande distância mantendo praticamente a mesma forma, o deixou bastante intrigado. Com o passar dos anos, apesar das duras críticas, aquela observação foi ganhando crédito na comunidade científica e até os dias de hoje estamos descobrindo efeitos similares em diferentes áreas da física e da tecnologia.

A equação de Kortweg e de Vries, KdV, é de 1895 e comprova observações de Boussinesq da onda solitária. No século 20, com a necessidade de processamentos de dados mais eficientes e rápidos, o campo da ciência ondulatória se deparou com problemas extremamente complicados cujas soluções requeriam os mais sofisticados métodos de solução computacional. Nessa época já haviam se esquecido dos sólitons, porém, a idéia de ondas dispersivas e não-lineares equilibrando-se mutuamente ressurgiu com mais força e base teórica. A partir de algumas análises e métodos numéricos realizados por Kortweg e de Vries foi possível desenvolver um modelo matemático que descrevia a propagação de uma onda solitária unidirecional. Esse modelo levou os nomes desses pesquisadores, mas é mais conhecida na sua forma reduzida: equação de KdV. Próximo à metade desse século, um ramo da ciência e tecnologia começa a tomar forma e a desenvolver-se com características próprias, dando início a uma nova era: a microeletrônica.

A microeletrônica foi responsável pelos grandes avanços tecnológicos da história moderna. Sua base está fundada principalmente na tecnologia do silício, cuja relevância no ramo é tanta que o impulso que suas inovações provocaram na economia mundial levou muitos eruditos a creditarem à microeletrônica do silício a responsabilidade pela terceira revolução industrial. Desde a invenção do primeiro transistor pela Bell Telephone em 1947 a capacidade de processamento de dados e, como consequência, o rápido avanço dos meios de comunicação não pararam mais. Hoje em dia já se estudam até processadores quânticos. Evidentemente o mundo em que vivemos está cada vez mais dependente da eletricidade, e a microeletrônica, ou melhor, a nanoeletrônica ocupa um lugar fundamental nessa questão. Tudo que fazemos está quase que diretamente relacionado com o uso de algum dispositivo eletrônico; e essa parece ser uma tendência irreversível.

Os dispositivos eletrônicos comerciais são baseados nos semicondutores, cujas características elétricas diferem daquelas propriedades observadas nos materiais condutores ou isolantes. Trata-se de um componente intermediário que ora conduz corrente elétrica, ora não conduz. E é justamente o domínio desta propriedade e das técnicas de fabricação em microeletrônica que permitiram a criação de circuitos integrados que efetuam de centenas a milhões de cálculos por segundo. Ainda assim, existe um fator mandatório nesses dispositivos: a temperatura; o que traz à tona a necessidade de melhorar a eficiência energética fazendo dispositivos mais rápidos e que consumam menos. Neste sentido, em pesquisas que vêm sendo feitas desde a primeira década do século XX, descobriu-se outra categoria de materiais cujas propriedades proporcionam grandes aplicabilidades, desde que sejam dominadas por completo. Esses são os materiais supercondutores que possuem resistência elétrica nula, ou seja, não há perdas de energia por efeito Joule, como ocorre em outros materiais.

Os primeiros relatos e pesquisas sobre supercondutores datam de 1909-1912, sendo o físico Kamerlingh Onnes o primeiro a verificar resistividade zero do mercúrio e do ouro. Os cientistas estavam interessados em descobrir como seria a resistividade de um metal a temperaturas extremamente baixas, próximas do zero absoluto. Sabia-se que a condutividade é provocada pelo movimento dos elétrons e que a resistência é devido ao espalhamento dos elétrons pelos íons dos cristais metálicos. Duas questões surgiram: a amplitude de espalhamento diminuiria rápido o suficiente, à medida que se diminuía a temperatura, com o objetivo de produzir resistividade nula no zero absoluto? Ou a mobilidade dos elétrons também diminuiria, provocando, assim, condutividade zero a temperaturas próximas do zero absoluto? Se a natureza da resistividade seguisse a última hipótese, então, como proposto em 1902 por Kelvin, a resistência de metais puros diminuiria à medida que a temperatura diminuísse, atingindo um mínimo e, subitamente subiria infinitamente no zero absoluto.

Em seus primeiros relatórios para o KNAW (KONINKLIJKE NEDERLANDSE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN), Kamerlingh, citado acima, mencionou que havia medido um mínimo de resistência, indicando que a princípio acreditava no modelo proposto por Kelvin. Porém, observou que a 4,3K a resistência era muito menor do que a medida a 14K em seu laboratório, mas ainda assim seus equipamentos eram capazes de mensurá-las. Além disso, entendeu que a resistência não deveria ser independente da temperatura e que em temperaturas extremamente baixas e dentro dos

limites de precisão experimentais a resistência tornar-se-ia nula. O interessante é que nesse estado a corrente elétrica no material permanecia constante e inalterada por horas, mostrando que a mobilidade não cairia até anular-se. Além dessa propriedade muitas outras foram descobertas, porém, ainda hoje a teoria da supercondutividade não está completa.

Um dos efeitos mais importantes dos supercondutores é o efeito Josephson em corrente contínua e alternada, DC e AC, preditos em 1962 pelo físico britânico Brian David Josephson. O primeiro diz que quando aplicada uma tensão contínua nos terminais de dois supercondutores isolados por um fino dielétrico na ausência de campo magnético externo, uma corrente contínua atravessaria este isolante por tunelamento. Já o efeito AC diz que se aplicarmos um potencial neste mesmo arranjo a corrente gerada será alternada e sua fase irá variar linearmente com o tempo. Outra propriedade dos supercondutores é a quantização do fluxo magnético em uma amostra, verificada experimentalmente. A essa quantização do fluxo damos o nome de fluxon. Esse fenômeno apresenta características interessantes de dispersão e não-linearidade, as quais são verificadas em ondas do tipo sólitons cujas propriedades são análogas às vistas em redes elétricas.

## 2 Sólitons: Princípios Físicos

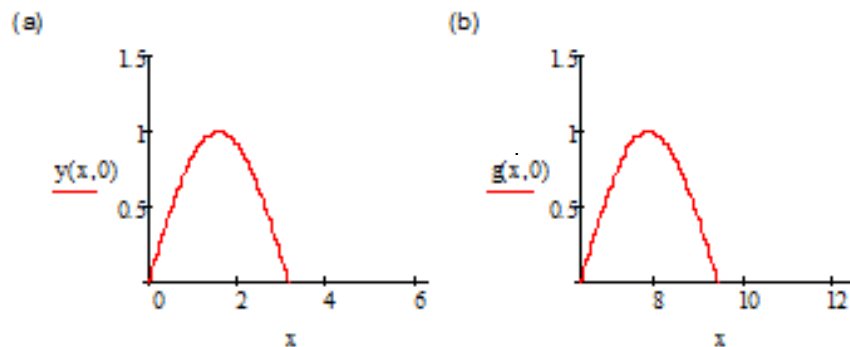
### 2.1 Ondas e definições

Fenômenos ondulatórios estão presentes constantemente em nosso cotidiano. Quando carros passam por uma avenida movimentada é possível perceber a vibração nas paredes e janelas dos prédios, mas, não há contato físico com os veículos. O que pode ter provocado esses efeitos sem que houvesse transferência de matéria ou contato direto entre os objetos? A resposta é bem simples, embora a compreensão em si não o seja. O que provoca, não apenas essas vibrações mecânicas que acabamos de mencionar, mas também muitos outros tipos de fenômenos que envolvem vibrações e efeitos ondulatórios é a transferência de energia e momento através de um sinal ao qual chamaremos de onda de propagação, ou apenas onda.[1], [2]

Trataremos neste trabalho apenas de ondas transversais unidirecionais, ou seja, seu perfil é descrito no eixo  $y$  durante sua propagação em  $x$ . Seu perfil dá-se por uma equação dependente tanto do espaço quanto do tempo, conforme equação (1) abaixo.

$$y = y(x, t) \quad (1)$$

Assumimos, assim, uma onda livre a qual mantém sua forma inalterada ao longo do espaço-tempo com uma velocidade  $v$  constante. Portanto, em outro referencial com a mesma variação de tempo ( $t = 0$ ), a onda tem perfil semelhante, como ilustrado na Figura 1a e 1b abaixo.



**Figura 1** Perfil no referencial inicial. (a) Perfil instantes depois; com  $g(x',0) = y(x,0)$ . (b)

$$g(x', t) = g(x', 0) = h(x') \rightarrow \text{independente do tempo}$$

$$g(x', t) = y(x, t) = h(x')$$

onde,  $h(x')$  refere-se ao perfil da onda que depende do tempo indiretamente através de  $x' = x - vt$ . Aqui,  $x$  é o espaço total percorrido pela onda e o termo  $-vt$  refere-se à distância no sentido positivo (para direita) do eixo  $x$  que a onda percorreu a partir do referencial original  $y(x, t)$  para  $t = 0$ . Portanto,

$$h(x') = h(x - vt) \quad (2)$$

Analisando a variação do perfil da onda no tempo, temos:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v \frac{dh}{dx'}$$

Obviamente que para a onda sair de um ponto de repouso para o seu máximo, seja qual for sua natureza, existe uma força que dá origem a esse movimento. Logo, podemos caracterizar uma aceleração para esse movimento conforme segue.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 h}{dx'^2}$$

De forma análoga definimos as variações espaciais desta onda em relação ao eixo  $x$ , sendo que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 h}{dx'^2}$$

Igualando os termos temos a equação diferencial, (3) que rege o comportamento de uma onda livre,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

As soluções desta equação encontram-se entre as funções periódicas, como era de se esperar. Portanto, sendo

$$h(x') = A \cos(kx' + \delta)$$

o perfil será descrito por uma função senoidal conforme segue:

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \delta)$$

Sendo  $\omega$  a frequência angular, temos

$$\omega = kv = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

onde  $f$  é a frequência – quantidade de ciclos por unidade de tempo – e  $T$  é o período.

Analogamente, dado um comprimento de onda  $\lambda$ ,  $k$  é o número de onda angular:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

O argumento da função senoidal chama-se fase  $\varphi(x, t)$  da onda e é ele que modula a amplitude. Assim, observando um ponto onde a fase é constante podemos verificar que a velocidade de fase,  $v$ , é dada por:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\omega}{k} = v \quad (4)$$



### 2.1.1 Velocidade de grupo

Considerando duas ondas,  $y_1$  e  $y_2$ , propagando-se no mesmo sentido com pequenas diferenças entre suas frequências e comprimentos de onda, vamos somá-las para saber como se dá a interferência entre ambas.

$$y_1(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) \quad (5)$$

$$y_2(x, t) = A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

Sendo que

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (6)$$

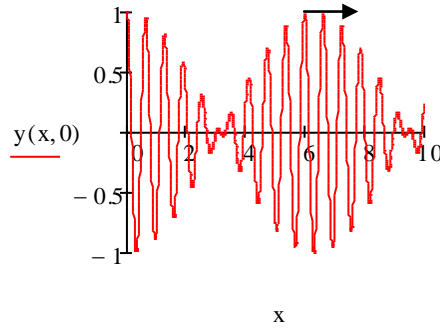
$$\Delta k = k_1 - k_2 \ll \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

E ainda, tomando  $\omega_1 > \omega_2$  e  $k_1 > k_2$ , rearranjando os termos, teremos:

$$y(x, t) = [2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta\omega}{2} t\right)] \cos(\bar{k} x - \bar{\omega} t) \quad (7)$$

Assim, o parâmetro que envolve a média das diferenças do vetor de onda e da frequência angular define uma onda que modula a amplitude de um grupo de ondas. (ver Figura 2) Como essas diferenças são suficientemente pequenas definimos uma segunda velocidade, a velocidade de grupo  $v_g$ , que é aquela com a qual se desloca um pacote de ondas. Desta forma, analogamente à equação (4), temos:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (8)$$



**Figura 2 Pacote de onda com velocidade de grupo dada pela equação (9) .**

Se as diversas ondas que compõem esse pacote tiverem velocidades de fase diferentes, então passaremos a ter um efeito conhecido como dispersão, conforme veremos a seguir.

### 2.1.2 Princípio de Superposição

Equações diferenciais lineares evidentemente podem ser somadas sem que o resultado altere suas características. Fisicamente está acontecendo o que chamamos de superposição linear. Se quisermos somar duas ondas  $y_1(x, t)$  e  $y_2(x, t)$ , teremos:

$$y(x, t) = ay_1(x, t) + by_2(x, t) \quad (9)$$

Então, se  $y_1(x, t)$  e  $y_2(x, t)$  forem soluções da equação de onda, a equação (9) também o será. Os parâmetros  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias. O resultado deverá depender de duas funções arbitrárias que descrevem a superposição de ondas propagando-se em dois sentidos.

$$y(x, t) = h(x - vt) + g(x + vt)$$

## 2.2 Sólitons

A equação de onda livre dada por (3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x}\right) y = 0$$

Utilizando a notação  $\frac{\partial}{\partial t} = \partial_t$  e  $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ , podemos reescrever a equação acima como:

$$(\partial_t + v \partial_x)(\partial_t - v \partial_x)y = 0$$

Sendo suficiente apenas:

$$(\partial_t - v \partial_x)y = 0$$

que pode ser notado como  $y_t - v y_x = 0$ . Portando, fazendo  $v = 1$ , temos que a onda livre pode ser reescrita como:

$$y_t - y_x = 0$$

### 2.2.1 Dispersão

A velocidade de grupo deduzida anteriormente passa a ter maior importância em meios dispersivos, onde um pacote de onda passa desfazer-se à medida que este efeito se torna mais evidente. Em geral, a característica dispersiva de um sistema dá-se pelo surgimento da derivada de terceira ordem, conforme vemos abaixo.

$$y_t + y_x + y_{xxx} = 0 \tag{10}$$

Admitindo uma solução complexa, do tipo

$$y(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$$

Ao verificarmos se a solução acima procede descobriremos que ela só é válida quando a frequência angular  $\omega$  é uma função do vetor de onda  $k$ , normalmente denominada relação de dispersão.

Desta forma para  $v = 1$ ,

$$\omega(k) = k - k^3$$

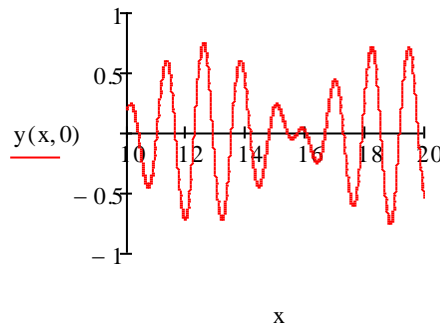
Se analisarmos com mais detalhes veremos que um sistema com diversas ondas e diferentes vetores de ondas desloca-se com uma velocidade  $v_g$ . (ver Figura 2) A esse sistema nomeamos pacote de onda. Assim, segundo a equação (9), a velocidade de grupo que nada mais é do que a velocidade com a qual esse pacote se desloca é dada por:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = 1 - 3k^2 \quad (11)$$

Portanto, como estamos lidando com sistemas de ondas dispersivas lineares, podemos adicionar várias ondas baseando-se no princípio da superposição, sendo que, agora

$$y(x, t) = \int A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

Os efeitos dispersivos podem ser vistos comparando a Figura 3 abaixo com a Figura 2. Note que as diversas ondas estão mais afastadas umas das outras e que a amplitude sofre uma atenuação à medida que ocorre a propagação do pacote.



**Figura 3** Dispersão do pacote de ondas à medida que este se propaga.

### 2.2.2 Não-linearidade

Em alguns sistemas quando a amplitude do sinal é muito grande ocorre o que chamamos de efeito não-linear. O caso mais simples é descrito pela equação a seguir:

$$y_t + (1 + y)y_x = 0 \quad (12)$$

Como podemos verificar a solução geral desta onda torna-se:

$$y(x, t) = f\{x - (1 + y)t\}$$

onde,  $\frac{dx}{dt} = 1 + y$

A relação de dispersão neste caso é  $\omega = kv = k(1 + y)$

### 2.2.3 Equação de KdV

Sólitons são pulsos que comportam as duas características estudadas até agora, dispersão e não-linearidade. Ondas desse tipo têm uma amplitude elevada e propagam-se com uma velocidade consideravelmente maior do que as outras. Uma propriedade extremamente interessante do ponto de vista tecnológico é que elas percorrem uma grande distância sem se dispersarem ou romperem na crista, mesmo que colidam com pulsos da mesma natureza.

O que se propõe para explicar essa propriedade é que deve haver um equilíbrio provocado pela existência conjunta das duas características mencionadas. Então uma forma possível que toma a equação desta união é a que segue:

$$y_t + (1 + y)y_x + y_{xxx} = 0 \quad (13)$$

Segundo o método desenvolvido por Kortweg e de Vries parametrizamos essa equação, onde  $\alpha y = 1 + y$ ,  $\beta t = t$ ,  $\gamma x = x$ , portanto rearranjando (13), temos:

$$y_t + \frac{\alpha\beta}{\gamma} y y_x + \frac{\beta}{\gamma^3} y_{xxx} = 0 \quad (14)$$

Sendo que  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são constantes não nulas. Esta é a forma mais usual da equação de KdV, que admite soluções solitônicas.

## 2.3 Sólitons em Redes de Transmissão

*“Today, many scientists see nonlinear science as the most important frontier for the fundamental understanding of Nature.”*Remoissenet, Michel. [4]

Antes de chegarmos ao objetivo de demonstrarmos a equação de KdV para sistemas de transmissão elétrica vejamos três características independentes para este sistema que juntas formarão a base para o nosso projeto. Para este fim, descreveremos uma onda livre sem a ação de componentes que possam apresentar dissipação, dispersão ou até mesmo a não linearidade. [3], [4]

### 2.3.1 Onda Linear Não Dissipativa em Linha de Transmissão

Dado um sistema elétrico que represente uma linha de transmissão ideal (ver Figura 4), ou seja, as resistências ativas de seus componentes não produzem energia por efeito Joule, consideremos um sinal alternado de baixa amplitude alimentando-o.

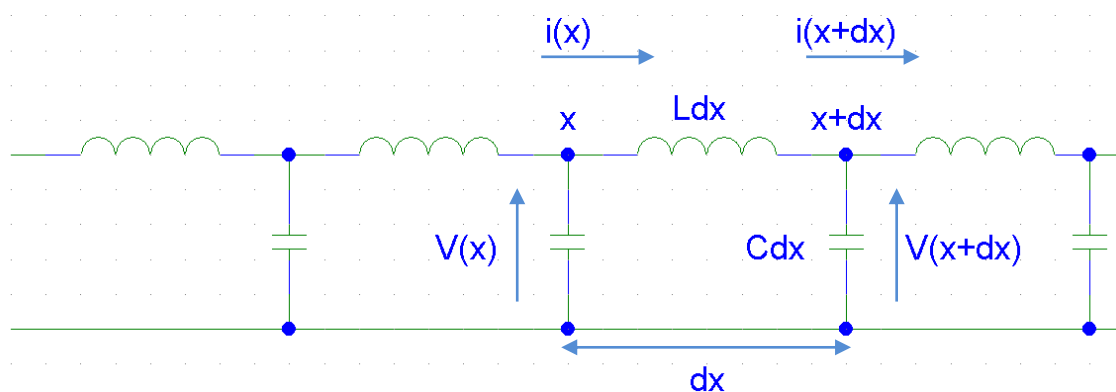


Figura 4 Linha de transmissão elétrica linear não dissipativa.

Analisando uma única célula desta linha composta por indutores e capacitores,  $Ldx$  e  $Cdx$  respectivamente, vamos determinar como se dá o comportamento teórico do sinal de tensão e corrente de entrada em qualquer ponto. Como  $L$  e  $C$  – indutância e capacitância por unidade de comprimento, respectivamente – são independentes da corrente e da tensão temos um sistema linear. Através da Lei dos nós de Kirchhoff facilmente concluímos que a corrente no capacitor será:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = i(x) - i(x + dx)$$

Porém, sabendo que  $q = C.V$ , então

$$Cdx \frac{\partial V}{\partial t} = i(x) - i(x + dx) \quad (15)$$

Como o termo  $dx$  representa distâncias diferenciais praticamente insignificantes podemos usar a expansão em série de potências de Taylor para determinar um polinômio diferencial que possibilite identificar uma aproximação do ponto  $a$  pelo ponto  $x$  (ver Apêndice A) o que facilitará alguns cálculos e a compreensão de alguns fenômenos que ao longo do trabalho serão essenciais, já que com esta técnica não necessitaremos parametrizar cada uma das células. (ver Figura 5)

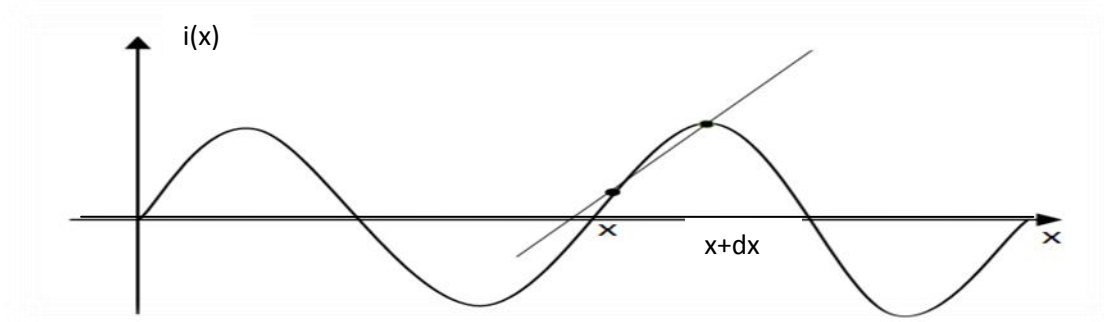


Figura 5 Aproximação por Taylor de um ponto  $x=a$ , onde  $a$  é o intervalo aberto de convergência  $x$ .

Assim sendo, pela fórmula de Taylor (ver Anexo A):

$$i(x + dx) = i(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n i(x)}{\partial x^n} (x + dx - x)^n$$

onde  $n = 1, 2, 3 \dots \infty$



Devido ao fato de  $dx$  ser muito pequeno e que estamos considerando uma onda livre, não há necessidade de prolongarmos o polinômio para graus maiores que  $n = 1$ , portanto

$$i(x + dx) = i(x) + dx \frac{\partial i(x)}{\partial x} \quad (16)$$

Substituindo (15) em (16) concluímos que:

$$C \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{\partial i}{\partial x} \quad (17)$$

Demonstrando que a variação temporal da tensão vezes a capacitância em qualquer ponto é diretamente proporcional à variação da corrente convencional no espaço. Agora, realizaremos o mesmo procedimento, porém, levando em consideração a diferença de potencial entre os pontos  $x$  e  $(x + dx)$  e relacionaremos a grandeza potencial com a corrente elétrica.

Considerando um regime alternado, devemos levar em conta que o fluxo magnético varia no tempo, porque a corrente alterna concomitantemente com o potencial aplicado na fonte da linha de transmissão. Portanto, para uma variação instantânea do fluxo magnético, temos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (18)$$

Adaptando para nossa célula unitária da Figura 4, verificamos que a queda de potencial no indutor  $L$  é:

$$L \cdot dx \cdot \frac{\partial i}{\partial t} = V(x) - V(x - dx) \quad (19)$$

Analogamente ao procedimento anterior, aplicaremos as mesmas técnicas da expansão de Taylor para fazermos uma aproximação sempre no ponto  $x$ . Feito isso, substituímos em (18) e obtemos a seguinte relação:

$$L \frac{\partial i}{\partial t} = - \frac{\partial V}{\partial x} \quad (20)$$

Notamos agora que a variação no tempo da corrente convencional pela indutância é proporcional à variação do potencial aplicado no ponto de análise. Ainda mais, se compararmos as equações (17) e (20) podemos concluir que há uma interdependência. Logo, derivando essas equações em  $t$  e  $x$ , respectivamente, temos:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{C \cdot L} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad (21)$$

que é a equação de onda livre, onde  $v = \frac{1}{\sqrt{C \cdot L}}$  é a velocidade de propagação, cuja solução é dada por

$$V(x, t) = V_m \cos(kx - \omega t)$$

De forma análoga podemos usar esse procedimento para a análise da corrente elétrica. Entretanto, há algumas considerações interessantes a respeito da relação do potencial elétrico com o campo elétrico gerado pelo circuito e que nos ajudarão a achar a solução geral para equação de onda do sinal do potencial elétrico, conforme veremos no próximo tópico.

### 2.3.2 Solução para Equação de Onda Linear

A equação (21) é linear e admite o uso do princípio da superposição para justificar a coexistência de ondas propagando-se em sentidos opostos. Mas, para chegarmos a essa conclusão imaginemos uma onda livre propagando-se sempre com seu perfil inalterado e, junto com este perfil um sistema de coordenadas semelhante ao inicial.

$$X = x - vt \quad T = x + vt$$

Então, a função  $V$  que descreve o potencial elétrico dependerá de  $x$  e  $t$  por meio das variáveis  $X$  e  $T$  do novo sistema de coordenadas.

$$V(x, t) \rightarrow V(X, T)$$

Sendo assim,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} - v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial T \partial X} - v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial T} \quad (22-a)$$

$$v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} + v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial T \partial X} + v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial T} \quad (22-b)$$

Substituindo essas equações em (21) temos que, se:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial T \partial X} = \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial T} = 0$$

Então, de (22)

$$4v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial T \partial X} = 0$$

De forma que,

$$\frac{\partial V_T}{\partial X} = \frac{\partial^2 V}{\partial T \partial X} = \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial T} = \frac{\partial V_X}{\partial T} = 0$$

Portanto,  $V_T = \frac{\partial V}{\partial T}$  não depende de  $X$  e  $V_X = \frac{\partial V}{\partial X}$  não depende de  $T$ . Sendo assim,

$$V = f(X) + g(T)$$

ou ainda

$$V = f(x - vt) + g(x + vt)$$

que, de fato, são duas ondas unidirecionais em sentidos opostos; de maneira que  $f$  e  $g$  assumem quaisquer que sejam as funções desde que estas sejam periódicas.

Há de se considerar ainda que para a proposição de duas ondas propagando-se no mesmo sentido e direção com uma pequena diferença de fase, nota-se que além da velocidade de fase de cada onda, existe uma velocidade de grupo que define a velocidade com que um pacote de onda se deslocará. Tal velocidade é definida como:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}$$

### 2.3.3 Potência e Densidade de Energia da Onda

Fazendo o produto de (17) por  $V$  e (20) por  $i$  e somando os resultados vamos procurar as equações diferenciais que regem o comportamento da potência e a densidade de energia instantânea.

$$C.V \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial i}{\partial x} + L.i \frac{\partial i}{\partial t} + i \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Resolvendo os termos e definindo  $W(x,t)$  como a densidade de energia e  $P(x,t)$  como a potência elétrica, verificamos que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \cdot CV^2 + \frac{1}{2} \cdot Li^2 \right) = - \frac{\partial (V \cdot i)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial P(x,t)}{\partial x}$$

Sendo que  $W(x,t)$  e  $P(x,t)$  compensam-se de forma a estabilizar a energia do sistema elétrico como um todo.

## 2.4 Dispersão

Incluiremos outro elemento na linha analisada anteriormente para entender o comportamento do fenômeno de espalhamento de uma onda à medida que esta se propaga num meio material predominantemente indutivo ou capacitivo (ver Figura 6).

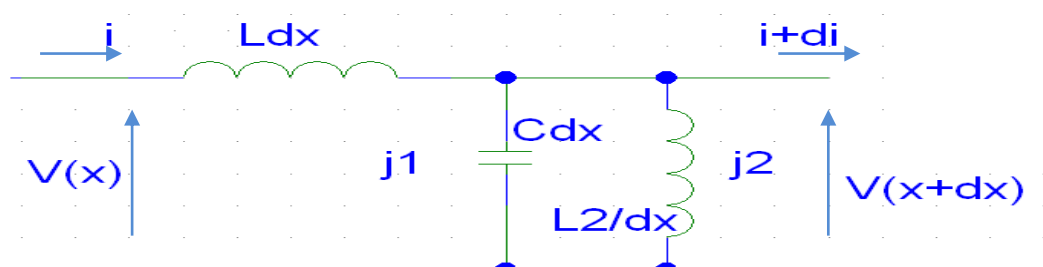


Figura 6 Linha de transmissão elétrica linear, dispersiva e não dissipativa.

Note que agora o circuito possui um indutor paralelo, o que indica que há perdas no sinal por indução magnética no circuito devido à indutância por unidade de área, caracterizando a dispersão do sinal de entrada. Porém, analisando-se o comportamento do sinal de entrada ao longo do circuito com os mesmos procedimentos de aproximação por séries de potência para onda livre e levando-se em conta as características deste novo sistema vemos que potencial entre  $x$  e  $(x + dx)$  não muda nada em relação à linha de transmissão anterior. Porém, pela Lei dos Nós de Kirchhoff a corrente tem o seguinte comportamento:

$$i(x) - (j_1 + j_2)dx - i(x + dx) = 0 \quad (23)$$

Introduzimos  $(j_1 + j_2)$  como sendo a densidade linear de corrente elétrica. Assim, temos que no indutor em paralelo o potencial por unidade de comprimento será:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t dx} = \frac{L_2}{dx} \frac{\partial i_2}{\partial t} = L_2 \frac{\partial j_2}{\partial t}$$

E, para o capacitor também temos corrente por unidade elementar de comprimento, ou seja, densidade de corrente:

$$j_1 = \frac{i_1}{dx} = C \frac{\partial V}{\partial t}$$

Fazendo as aproximações por Taylor como antes, temos que (23) torna-se:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -(j_1 + j_2) \quad (24)$$

De (20) verificamos que:

$$-\frac{1}{L} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$$

E de (24):

$$\frac{\partial i}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial}{\partial t} (j_1 + j_2) = -C \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{V}{L_2}$$

Ainda levando-se em conta que estamos tratando de campos conservativos, obtemos a seguinte equação de onda dispersiva:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{L \cdot C} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{V}{C \cdot L_2} = 0 \quad (25)$$

Sendo que  $v^2 = \frac{1}{C \cdot L}$  e  $\omega_0^2 = \frac{1}{C \cdot L_2}$  velocidade e frequência, respectivamente.

Portanto:

$$\omega_0^2 = \omega^2 - (v \cdot k)^2 \quad (26)$$

Assim, as velocidades de fase  $v(k)$  e de grupo  $v_g(k)$  dependerão de  $k$ , de forma que:

$$v(k) = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + (v \cdot k)^2}}{k} \quad (27)$$

e

$$v_g(k) = \frac{v^2 k}{\sqrt{\omega_0^2 + (v \cdot k)^2}} \quad (28)$$

Isto significa dizer que à medida que o tempo passa um sinal inicialmente bem definido e que contenha certa quantidade de ondas com diferentes vetores de onda, irá espalhar-se, ou dispersar-se.

#### 2.4.1 Dispersão em rede

Com os conceitos desenvolvidos até o momento podemos entender melhor as características de uma rede elétrica, uma linha de transmissão linear discreta. As células estudadas para ondas livres agora são estendidas a um número finito dado por  $n + 1$ , conforme ilustração abaixo.

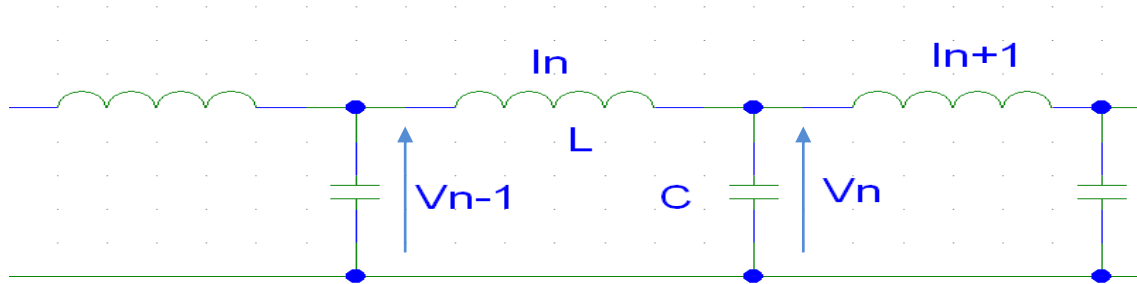


Figura 7 Rede de transmissão elétrica linear não dissipativa.

Novamente, com uma simples análise de malha concluímos que a tensão no indutor e a corrente no capacitor são, respectivamente, dadas por:

$$V_{n-1} - V_n = \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} \quad (29)$$

onde,  $V_n(t)$  é a tensão no  $n$ -ésimo capacitor,

$$i_n - i_{n+1} = \frac{\partial q_n}{\partial t} \quad (30)$$



e  $i_n(t)$  é a corrente no n-ésimo indutor.

Considerando a tensão para o capacitor  $C$  e sua variação de carga achamos, sempre através da expansão de Taylor, o termo dependente do tempo para o qual o potencial elétrico da equação diferencial e sua relação com cada célula da rede elétrica.

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial t^2} = \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} (i_n - i_{n+1}) = \frac{1}{L \cdot C} (V_{n+1} + V_{n-1} + 2V_n) \quad (31)$$

Da mesma forma, quando levamos em conta a corrente no indutor  $L$  somos capazes de relacionar sua propagação nas células com a dependência temporal, conforme segue:

$$\frac{\partial^2 i_n}{\partial t^2} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial t} (V_{n-1} - V_n) = \frac{1}{L \cdot C} (i_{n+1} + i_{n-1} + 2i_n) \quad (32)$$

Admitindo uma solução harmônica complexa da seguinte forma:

$$V_n(t) = V_0 e^{i(\omega t - \kappa n)} \quad (33)$$

e considerando apenas ondas propagando-se no sentido positivo, mas que assumem qualquer número de onda, deduzimos a relação de dispersão abaixo:

$$\omega = \omega_c \left| \sin \frac{\kappa}{2} \right|$$

onde,  $\omega_c = \frac{2}{\sqrt{L.C}}$  é a frequência de corte. E  $n = \frac{x}{\delta}$ , onde  $\delta \ll 1$ , representa unidades de células muito pequenas. E ainda, temos que  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\kappa}{\delta}$ . Como  $\omega$  depende do vetor de onda, então a velocidade de fase das ondas pertencentes a um pacote de onda, será:

$$v(k) = \frac{\omega_c}{k} \left| \sin \frac{k}{2} \right|$$

Note que essas considerações foram feitas levando-se em conta cada célula  $LC$  da rede. Isso porque deve existir uma diferença nas amplitudes do potencial e da corrente de unidade para unidade, gerando sinais harmônicos que podem distorcer a energia distribuída na rede. Porém, ao considerarmos que a diferença de potencial entre cada célula é praticamente nula, podemos aproximar os termos  $V_{n+1}$  e  $V_{n-1}$  para  $V_n$  (ver Figura 7), onde  $n$  é um número inteiro, portanto  $x = \delta n$ . Então, nos valendo mais uma vez do polinômio de Taylor, temos que:

$$V_{n\pm 1} = V + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m V_n}{\partial n^m} = V \pm \delta \frac{\partial V}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial^2 V}{2! \partial x^2} \pm \delta^3 \frac{\partial^3 V}{3! \partial x^3} + \delta^4 \frac{\partial^4 V}{4! \partial x^4} \quad (34)$$

Substituindo os resultados obtidos em (31) e rearranjando os termos obtemos a seguinte equação de onda para rede de transmissão elétrica dispersiva.

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial t^2} - \frac{\delta^2}{L.C} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\delta^4}{12L.C} \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} \quad (35)$$

Para chegarmos à relação de dispersão usaremos, novamente, a solução harmônica dada por (12), de forma que:

$$\omega = v_0 k \sqrt{1 - \frac{(\delta \cdot k)^2}{12}}$$

onde,  $v_0 = \frac{\delta}{\sqrt{L \cdot C}}$ .

Assim, concluímos que quando as células unitárias estão muito próximas entre si seus elementos podem ser estudados do ponto de vista de uma rede elétrica discreta de forma que a velocidade de fase depende de pequenos valores de  $k = \frac{\kappa}{\delta}$ , ou seja, de comprimentos de onda grandes. A velocidade de fase também depende do número de onda e seu valor pode ser aproximado por:

$$v(k) = v_0 \sqrt{1 - \frac{(\delta \cdot k)^2}{12}}$$

#### 2.4.2 Dispersão de um “Pacote” de Ondas

Supondo que uma onda senoidal com frequência angular  $\omega_0$  e número de onda  $k_0$  constante, modulada por uma forma de onda  $\Psi(X, T)$  que varia pouco no espaço-tempo comparado com as variações da onda, seu perfil será definido pela seguinte equação:

$$V = Re[\Psi(X, T) e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}] \quad (36)$$

Como  $\Psi(X, T)$  é uma função que faz a modulação da amplitude do pacote de onda, temos que  $X = \epsilon x$  e  $T = \epsilon t$ , onde  $\epsilon \ll 1$ , variam muito pouco com o espaço e o tempo. Quando analisamos o espectro de distribuição dos números de onda dos pulsos

que compõem o pacote vemos que podemos expandir  $\omega$  em série de Taylor, desde que  $\omega = \omega(k)$  nas proximidades de  $k = k_0$ .

$$\omega - \omega_0 = \frac{\partial \omega}{\partial k} (k - k_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} (k - k_0)^2 + \dots \quad (37)$$

Note que  $\omega_0 = \omega(k_0)$

Essa equação representa a relação de dispersão para o “envelope” que envolve o pacote de ondas. Em outras palavras é a relação de dispersão da função  $\Psi(X, T)$ , porém no domínio da frequência, ou seja,  $\Psi(X, T) \rightarrow \Psi(K, \Omega)$ . Definindo-se as variáveis  $\Omega = \omega - \omega_0$  e  $K = k - k_0$  e, além disso, sabendo que a velocidade de grupo é  $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ , então podemos definir a relação de dispersão da velocidade de grupo, ou seja, a taxa de dispersão do pacote de onda, como sendo:

$$\frac{\partial v_g}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = 2P$$

Substituindo esses termos em (37), temos:

$$\Omega = v_g K + P K^2 \quad (38)$$

Para relacionarmos (36) e (38), faremos a transformada de Fourier (ver Anexo B) de  $\Psi(X, T)$ , onde:

$$\Psi(X, T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-i(\Omega T - K X)} \quad (39)$$

Multiplicando a equação por  $e^{i(\Omega'T - K'X)}$  e integrando uma vez para X e outra para T:

$$\iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \Psi(X, T) e^{i(\Omega'T - K'X)} dXdT = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} e^{i(\Omega'T - K'X)} e^{-i(\Omega T - KX)} dXdT \quad (40)$$

Note que no lado direito da equação, temos dois termos Delta de Dirac.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} e^{i(\Omega'T - K'X)} e^{-i(\Omega T - KX)} dXdT = a_n [(2\pi)^2 \delta(\Omega - \Omega') \delta(K - K')]$$

Então,

$$a_n = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \Psi(X, T) e^{i(\Omega'T - K'X)} dXdT$$

Propondo que  $\Psi(K, \Omega) = (2\pi)^2 a_n$ . Para  $\Omega = \Omega'$ , vem que:

$$\Psi(K, \Omega) = \mathcal{F}[\Psi(X, T)] = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \Psi(X, T) e^{i(\Omega T - KX)} dXdT$$

E, conforme proposto Apêndice B, a transformada de Fourier para  $\Psi(X, T)$ , será:

$$\Psi(X, T) = \mathcal{F}^{-1}[\Psi(K, \Omega)] = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \Psi(K, \Omega) e^{-i(\Omega T - KX)} dKd\Omega \quad (41)$$

Agora, derivando (41) duas vezes para  $K$  e uma para  $T$  e rearranjando os termos, obtemos as seguintes relações:

$$\Omega = i\epsilon \frac{\partial \Psi(X, T)}{\partial T} \cdot \frac{1}{\mathcal{F}^{-1}[\Psi(K, \Omega)]}$$

$$K = -i\epsilon \frac{\partial \Psi(X, T)}{\partial X} \cdot \frac{1}{\mathcal{F}^{-1}[\Psi(K, \Omega)]}$$

$$K^2 = -\epsilon^2 \frac{\partial^2 \Psi(X, T)}{\partial X^2} \cdot \frac{1}{\mathcal{F}^{-1}[\Psi(K, \Omega)]}$$

Substituindo em (38), vem que a relação de dispersão para o envelope de onda no domínio do tempo será:

$$i \left[ \frac{\partial \Psi(X, T)}{\partial T} + v_g \frac{\partial \Psi(X, T)}{\partial X} \right] + P\epsilon \frac{\partial^2 \Psi(X, T)}{\partial X^2} = 0 \quad (42)$$

Fazendo  $P = 0$  dizemos que o envelope propaga-se sem sofrer distorções em seu perfil, ou seja, a solução tem a forma canônica para ondas do tipo  $X - v_g T$ . Sendo assim podemos analisá-lo a partir de outro referencial definindo as seguintes substituições no sistema de coordenadas:

$$\Psi(X, T) \rightarrow \Psi(\xi, \tau)$$

onde,

$$\xi = X - v_g T \quad \tau = \epsilon T$$

De forma que (42), será transformada em:

$$i \frac{\partial \Psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} + P \frac{\partial^2 \Psi(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} = 0 \quad (43)$$

Associando um número de onda  $\kappa$  ao referencial  $\xi$  e fixando o tempo em  $\tau = 0$  vamos achar a solução dessa equação pelo método da transformada de Fourier. Onde:

$$\Psi(\xi, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\kappa \xi}$$

O coeficiente  $a_n$  torna-se, então:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi, \tau) e^{-i\kappa \xi} d\xi$$

e,

$$\Psi(\kappa, \tau) = 2\pi \cdot a_n$$

Novamente, de acordo com o Apêndice B, vem que:

$$\Psi(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\kappa, \tau) e^{i\kappa \xi} d\kappa \quad (44)$$

Portanto, ao substituírmos (44) em (43) e rearranjando os termos, estabelecemos a condição necessária que a solução exista quando:

$$i \frac{\partial \Psi(\kappa, \tau)}{\partial \tau} = p \kappa^2 \Psi(\kappa, \tau)$$

Portanto, integrando de uma condição inicial para uma final segue que:

$$\Psi(\kappa, \tau) = \Psi(\kappa, 0) e^{-i p \kappa^2 \tau}$$

Substituindo esse resultado em (44), temos:

$$\Psi(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\kappa, 0) e^{i(\kappa \xi - p \kappa^2 \tau)} d\kappa \quad (45)$$

onde  $\Psi(\kappa, 0)$  é a transformada de Fourier do pacote  $\Psi(\xi, \tau)$  quando  $\tau = 0$ .

Esta solução implica que a dispersão da velocidade de grupo afeta cada termo da transformada de Fourier do envelope do pacote de onda através do quadrado do número de onda e do tempo. [11] e [12]

### 2.4.3 Abertura do Pacote de Ondas por Dispersão Induzida

Supondo um sinal de tensão cuja forma é semelhante a uma Gaussiana para  $\tau = 0$ , ou seja,

$$\Psi(\xi, 0) = A e^{\frac{-\xi^2}{2L_0^2}}$$

onde  $A$  é a amplitude e  $L_0$  é a largura à meia-largura de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .



Sua transformada de Fourier será:

$$\Psi(\kappa, 0) = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\xi^2}{2L_0^2}} e^{-i\kappa\xi} d\xi = AL_0\sqrt{2\pi}e^{-\frac{(L_0\kappa)^2}{2}}$$

Substituindo na equação (45) obtemos uma expressão para o pacote de onda num tempo  $\tau$  qualquer.

$$\Psi(\xi, \tau) = \frac{AL_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(L_0\kappa)^2}{2}} e^{i(\kappa\xi - P\kappa^2\tau)} d\kappa \quad (46)$$

Quando integrada e analisada em termos das variáveis  $X$  e  $T$ , temos:

$$\Psi(X, T) = \frac{A^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{2iP\epsilon T}{L_0^2}\right)^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(X - v_g T)^2}{2L_0^2 \left(1 + \frac{2iP\epsilon T}{L_0^2}\right)}\right] \quad (47)$$

A parte real desta expressão representa a parte física do envelope do pacote de onda. A energia contida pelo pacote de onda mostra que realmente há dispersão conforme esta se propaga. Como vemos abaixo, a energia é proporcional ao quadrado do módulo do perfil do potencial:

$$|\Psi(X, T)|^2 = \frac{A^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{2P\epsilon T}{L_0^2}\right)^2}} \cdot \exp \left[ -\frac{(X - v_g T)^2}{2L_0^2 \left(1 + \frac{2P\epsilon T}{L_0^2}\right)} \right]$$

Note que à medida que T aumenta a intensidade da onda diminui, o que implica na dispersão do pacote.

## 2.5 Circuito Não-linear

Para os componentes elétricos em geral, mesmo quando aplicados sinais altos de tensão e corrente, o efeito da não-linearidade é difícil de ser observado. Entretanto, podemos observar esse efeito introduzindo componentes não-lineares em nosso circuito, ou seja, os capacitores e indutores dependem da tensão e corrente. Mas, para facilitar nossos cálculos, vamos considerar que apenas os capacitores dependem da tensão e que os indutores são independentes da corrente – são lineares. Sendo assim, aplicando os conceitos já vistos, temos que:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C(V) \frac{\partial V}{\partial t} \quad (48)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (49)$$

Admitindo um dispositivo o qual tenha sua relação da capacitância com a tensão dada por uma expansão polinomial conforme segue:

$$C(V) = C_0(1 + a_1 V + a_2 V^2 + \dots)$$

Supondo ainda que a tensão seja suficientemente baixa de forma que apenas os dois primeiros termos são necessários, podemos fixar  $a_1 = -2b$  ( $b$  é pequeno), então:

$$C(V) = C_0(1 - 2bV) \quad (50)$$

Percebemos imediatamente que ao aplicar a solução  $V = V_m \cos(kx - \omega t)$  a relação (48) implica na interferência de outro termo chamado de segunda harmônica da solução.

$$\frac{\partial i}{\partial x} = V_m C_0 \omega \sin(kx - \omega t) - V_m^2 C_0 b \omega \sin 2(kx - \omega t)$$

Ainda com esta solução podemos analisar qual será a velocidade de propagação do sinal de tensão fazendo uma aproximação pelo binômio de Newton:

$$v = L \cdot c(V)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C_0(1 - 2bV)}} \approx \frac{1 + bV}{\sqrt{L \cdot C_0}} \quad (51)$$

Note que a velocidade de propagação depende do potencial aplicado. Logo, considerando um sistema de coordenadas propagando-se junto com o sinal conseguimos relacionar qual é a relação do sinal da corrente da linha de transmissão com a velocidade de propagação, onde:

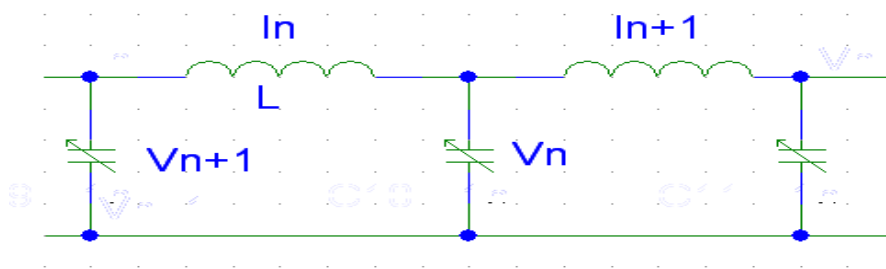
$$i = \int_0^V \sqrt{\frac{c(V)}{L}} dV$$

Como o sistema é ideal, ou seja, não há perdas por efeito joule, então, de (48), (49) e (50) a equação de que rege o comportamento do pulso será não-linear.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - L \cdot C_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = C_0 b L \frac{\partial^2 V^2}{\partial t^2} \quad (52)$$

O lado esquerdo contém a parte linear e o lado direito contém a não-linearidade, onde vemos que quando  $b = 0$  temos a onda livre.

## 2.6 Dispersão e Não-Linearidade: Sólitons



**Figura 8 Circuito equivalente para uma rede elétrica não-linear dispersiva.**

Nos sistemas analisados anteriormente notamos que a dispersão é caracterizada pelo espalhamento da onda à medida que esta se propaga. Este efeito existe devido à existência de ondas com números de onda diferentes. Já a não-linearidade ocorre quando o pico do sinal de onda é grande o suficiente para que este se desloque com velocidade maior do que a da base da onda, provocando sua ‘quebra’ à medida que esta se propaga ao longo do tempo.

Observando o circuito acima a capacitância depende da tensão e é dada pela mesma regra que no tópico precedente, ou seja,

$$C(V) = C_0(1 - 2bV)$$

Conforme a metodologia exaustivamente aplicada nos tópicos precedentes, deduzimos que a equação de onda que rege a propagação do sinal neste circuito será:

$$V_{tt} - \frac{\delta^2}{LC_0} V_{xx} = \frac{\delta^4}{12LC_0} V_{xxxx} + bV_{tt}^2 \quad (53)$$

Sendo que os índices  $x$  e  $t$  representam a ordem das derivadas parciais, e  $v_0^2 = \frac{1}{LC_0}$ .

Observando novamente o pulso a partir de outro referencial  $s = (x - vt)$ , a equação (53), torna-se:

$$(v^2 - v_0^2)V_{ss} = v^2 bV_{ss}^2 + \delta^2 \frac{v_0^2}{12} V_{ssss} \quad (54)$$

Integrando duas vezes e multiplicando por  $2 \frac{dV}{ds}$ , temos:

$$\frac{2}{3} b v^2 V^3 - (v^2 - v_0^2) V^2 + \delta^2 \frac{v_0^2}{12} \left( \frac{dV}{ds} \right)^2$$

Fazendo algumas manipulações nessa equação chegamos à conclusão de que a solução geral será:

$$\int_{s_0}^s ds = \frac{1}{2U} \int_{v_0}^v \frac{dV}{\sqrt{V^2 - \left( \frac{AV^3}{U} \right)}}$$

Onde,

$$A = \frac{4bv^2}{\delta^2 v_0^2} \quad U = \frac{6(v^2 - v_0^2)}{\delta^2 v_0^2}$$

Solucionamos esta integral por substituição trigonométrica, onde  $W^2 = \frac{AV}{U}$

$$\int_{s_0}^s ds = \frac{2}{\sqrt{2U}} \int_{W_0}^W \frac{dW}{W\sqrt{1-W^2}} = \frac{2}{\sqrt{2U}} [\operatorname{sech} W - \operatorname{sech} W_0]$$

Então considerando que  $s_0 = 0$  (posição inicial da onda) e que  $W_0 = 1$

$$V = 3 \frac{(v^2 - v_0^2)}{2bv^2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{3(v^2 - v_0^2)}(x - vt)}{v_0 \delta} \right] \quad (55)$$

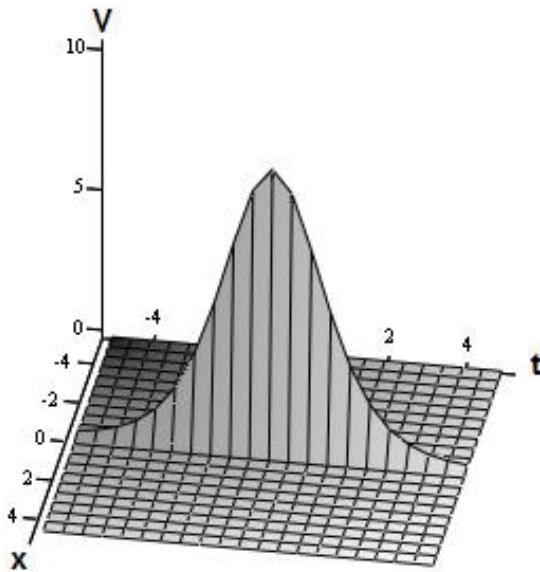


Figura 9 Sóliton unidimensional. Solução da equação (55)

Esta é a solução que descreve a dependência do pacote de ondas com  $v$  e  $v_0$ , mostrando que (54) tem o mesmo perfil à medida que se propaga. Para uma melhor análise podemos observar a mesma solução do ponto de vista da equação (53), onde podemos ver que se  $b$  e  $\delta$  forem pequenos teremos uma onda livre. Olhando para o lado esquerdo desta mesma equação notamos que

para que o perfil da onda permaneça o mesmo os termos dispersivo e não-linear devem compensar-se de forma que um anule o outro. E é esta característica matemática que prova a formação do sóliton em sistemas elétricos onde há dispositivos não-lineares, onde vemos que seus efeitos podem eliminar a dispersão provocada na rede por características do próprio circuito.

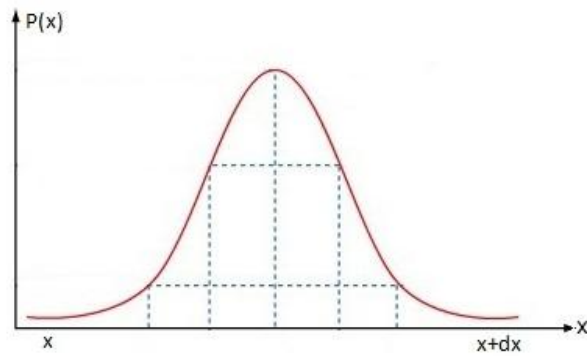
### 3. Supercondutividade: Conceitos da Mecânica Quântica

#### 3.1. Função de onda

Conhecida como amplitude de probabilidade refere-se aos estados energéticos – ou estados quânticos – possíveis nos quais há certa probabilidade de se encontrar uma partícula, sendo que sua função admite uma solução complexa. Esta deverá ser unívoca, finita e contínua em todos os estados em que se possa determinar a posição da partícula. Um dos conceitos mais importantes derivados da função de onda, tal como ela é concebida na mecânica quântica, é o de densidade de probabilidade  $P(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t)\psi^*(\vec{r}, t)$ . Essa densidade torna possível extrair uma grandeza mensurável da partícula, pois seu resultado é um número real.

$$P(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \quad (56)$$

Como os resultados são probabilísticos é mais vantajoso normalizar a função  $\psi(\vec{r}, t)$  de forma que a densidade de probabilidade total tenha sua soma igual um.



**Figura 10 Densidade de probabilidade normalizada.**

Na Figura 10 acima vemos uma distribuição gaussiana normalizada para  $t = 0$  dada uma função de onda unidirecional, onde a probabilidade de se encontrar o elétron entre  $x$  e  $x + dx$  é igual a um. Uma observação importante é que essa probabilidade é independente do tempo. Podemos descrever  $P(\vec{r}, t)$  ao longo de um elemento  $dx$  da seguinte forma:  $P(\vec{r}, t) dx$ . Segundo o gráfico e a equação (56) a densidade de probabilidade máxima será:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\vec{r}, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\vec{r}, t) \psi^*(\vec{r}, t) dx = 1 \quad (57)$$

## 3.2. Operadores Quânticos

Em física quântica fazemos uso de uma ferramenta extremamente eficaz no que diz respeito ao movimento das partículas: os operadores quânticos. Estes têm por finalidade extrair da função de onda grandezas físicas relacionadas ao movimento do elétron. A seguir descreveremos alguns desses operadores e como eles são usados para extrair a grandeza a que se referem.

### 3.2.1. Momentum



Trata-se do operador que quando aplicado a uma função extrai dela certo número o qual chamamos de autovalor da quantidade de movimento linear, ou momentum. Define-se da seguinte forma:

$$\hat{p}_{op} = -i\hbar\nabla \quad (58)$$

Quando aplicado a uma função de onda que descreve um elétron livre

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (59)$$

tem como resultado

$$\vec{p}_{op}\psi(\vec{r}, t) = \vec{p}\psi(\vec{r}, t) \quad (60)$$

onde,

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

Como podemos observar na equação (60) é natural do operador evidenciar a grandeza para a qual ele está definido (não vamos apresentar a demonstração desta definição neste trabalho).

### 3.2.2. Energia Cinética

Como na mecânica clássica, é relativamente fácil obter este operador a partir do  $\vec{p}_{op}$ . Basta que façamos o produto

$$\vec{p}_{op} \cdot \vec{p}_{op} = -\hbar^2 \nabla \cdot \nabla \quad (61)$$

Veja que não é o mesmo que elevar  $\vec{p}_{op}$  ao quadrado. O resultado seria totalmente diferente, visto que o diferencial estaria ao quadrado, logo, não encontraríamos uma segunda derivada – que é justamente o que estamos buscando.

Dividindo a equação (1.6) por  $2m^*$ , onde  $m^*$  é a massa efetiva do elétron, teremos:

$$T_{op} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \quad (62)$$

Aplicando à função (59)

$$T_{op}\psi(\vec{r}, t) = T\psi(\vec{r}, t) \quad (63)$$

onde,

$$T = \frac{k^2 \hbar^2}{2m}$$

é o autovalor da energia cinética.

### 3.2.3. Energia

Juntamente com o  $\vec{p}_{op}$ ,  $E_{op}$  é um dos operadores mais interessantes para a mecânica quântica, principalmente no que se refere à equação de Schrödinger. Com ele é possível analisar o autovalor da energia total de uma partícula cujo movimento é dependente do tempo. Define-se como sendo:

$$E_{op} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (64)$$

Novamente, quando aplicado à função de onda de um elétron livre – como descrito na equação (1.4) – temos os resultados abaixo.

$$E_{op}\psi(\vec{r},t) = E\psi(\vec{r},t) \quad (65)$$

onde,

$$E = \omega\hbar$$

é o autovalor da energia mecânica.

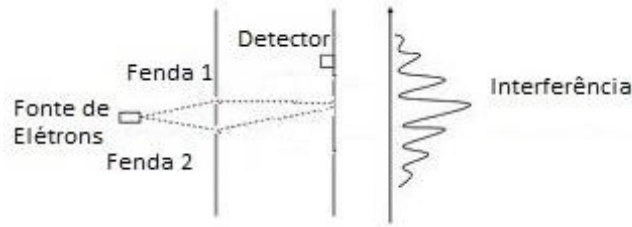
Sabemos que os autovalores  $\vec{p}$ ,  $T$  e  $E$  estão expressos corretamente porque estão na forma como foram propostos pelas equações de De Broglie. [5], [8] e [13]

### 3.3. Equação de Schrödinger

À medida que um sistema quântico recebe energia sua probabilidade de estados quânticos admissíveis aumenta conforme o tempo avança, visto que os elétrons podem movimentar-se através de níveis energéticos mais distantes do núcleo atômico, por exemplo. Além disso, sabemos que uma partícula pode se comportar como uma onda, como proposto por de Broglie em 1924. Essa proposta foi comprovada experimentalmente pelos pesquisadores C. J. Davisson e L. H. Germer em 1927 quando incidiram feixes de elétrons em uma amostra de cristal de níquel. O resultado desse experimento foi um padrão de interferência; fenômeno que era creditado até aquela época apenas às ondas eletromagnéticas.

Antes da comprovação por Davisson e Germer havia um físico austríaco, cujo nome era Erwin Schrödinger, que lançou uma proposta completamente inovadora: tratar o movimento do elétron da mesma forma como se trata uma onda, porém considerando o seu movimento em detrimento das contribuições energéticas como a energia potencial, cinética e, magnética (que será o foco de nosso estudo). Assim, a ideia sugeria que ao aplicarmos o operador hamiltoniano conseguiríamos extrair todas as contribuições de

energia para um elétron livre e ainda descrever exatamente seu comportamento de onda-partícula (ver Figura 11). [6]



**Figura 11 Interferência entre feixes de elétrons.**

O hamiltoniano é definido em termos dos operadores cinético e potencial,  $V_{op}$ , da seguinte forma:

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{op} \quad (66)$$

onde,

$$V_{op}\psi(\vec{r}, t) = q\phi\psi(\vec{r}, t)$$

Essa proposta sugere que, no caso do elétron livre, as contribuições da energia potencial e cinética correspondem à energia total do sistema. Então, a equação (66) deverá obedecer a essa igualdade de forma que no final das contas tenhamos um autovalor referente à energia total proporcional à sua taxa de variação no tempo.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{op} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (67)$$

Assim, a equação (67) quando aplicada à função de onda  $\psi(\vec{r}, t)$  nos dará a equação de Schrödinger na forma obtida por operadores quânticos.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}, t) + V_{op}\psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (68)$$

Essa é uma equação diferencial parcial de segunda ordem que nos diz que a evolução temporal dos estados quânticos de uma partícula contida numa região sob a ação de um potencial elétrico variante no tempo será equivalente ao produto da razão entre a constante reduzida de Planck ao quadrado pela massa efetiva e as variações no movimento desta partícula, mais uma contribuição das oscilações do potencial elétrico no espaço-tempo daquela região. [6]

### 3.3.1. Equação de Schrödinger Independente do Tempo

Admitindo que a região onde o elétron está inserido possui um potencial contínuo, ou seja, a trajetória da partícula deverá ocorrer sem alterações, portanto, estamos em busca de uma função cuja dependência é exclusivamente espacial.

Fazemos, assim, uma separação de variáveis na função de onda do elétron  $\psi(\vec{r}, t)$ .

$$\psi(\vec{r}, t) = \theta(\vec{r})\varphi(t) \quad (69)$$

Substituindo (69) em (68), dividindo o resultado por  $\theta(\vec{r})\varphi(t)$  e rearranjando os termos, temos:

$$\frac{1}{\theta(\vec{r})} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \theta(\vec{r}) + V_{op} \theta(\vec{r}) \right] = \frac{1}{\varphi(t)} \left[ i\hbar \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} \right] \quad (70)$$

A solução de (70) obrigatoriamente deverá ser uma constante, visto que, caso dependa de  $\vec{r}$  ou  $t$  haverá inconsistência na igualdade acima. Observando o lado esquerdo da equação temos uma ideia de que a constante poderá ser o autovalor correspondente à energia total do sistema, tendo em mente que o termo dentro das chaves é o hamiltoniano. Então:

$$\frac{1}{\theta(\vec{r})} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \theta(\vec{r}) + V_{op} \theta(\vec{r}) \right] = E$$

De forma que:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \theta(\vec{r}) + V_{op} \theta(\vec{r}) = E \theta(\vec{r}) \quad (71)$$

Esta equação ainda não está completa. Obviamente o lado direito deverá ser igual a  $E$ . Desta forma:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = E \varphi(t) \quad (72)$$

onde  $\varphi(t)$ , assume a seguinte solução:

$$\varphi(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

Portanto, a solução da equação proposta em (69) terá a seguinte forma:

$$\psi(\vec{r}, t) = \theta(\vec{r}) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad (73)$$

Esta é a amplitude de probabilidade de encontrar o elétron numa região cujo potencial é invariante no tempo. A densidade de estados possíveis, que é o que nos interessa na prática, é dada pela equação (56), portanto, aplicando em (73), teremos:

$$P(\vec{r}, t) = \theta^2(\vec{r}) \quad (74)$$

Essa equação é extremamente útil para o átomo de hidrogênio num ambiente de vácuo, onde o elétron sob ação apenas do campo elétrico proveniente do núcleo, relaciona os estados energéticos apenas espacialmente. [6]

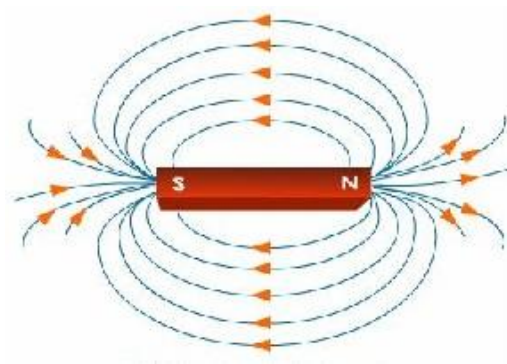
### 3.3.2. Equação de Schrödinger num Meio Magnético

Agora, vamos buscar uma solução para o caso em que o elétron se encontra num sistema sob ação de campos magnéticos. Portanto, para a compreensão mais profunda dos fenômenos envolvidos iniciaremos com um estudo sobre a ação de potenciais vetores, que estão intimamente ligados ao fluxo de campo magnético. Na sequência vamos entender, do ponto de vista quântico, como se dá o comportamento do elétron sob a ação desses campos.

#### 3.3.2.1. Potencial Vetor em Sistemas Quânticos

As linhas de campo magnético de um ímã são direcionadas de um extremo a outro, sendo que convencionalmente o pólo norte é por onde as linhas saem em direção

ao pólo sul (ver Figura 12). Dizemos que há um fluxo de linhas de campo  $\vec{B}$  no interior do imã.



**Figura 12** Linhas de campo magnético.

Pelo teorema da divergência sabemos que  $\vec{\nabla} \cdot$  aplicado a uma função vetorial  $\vec{F}$  mostra o sentido do seu fluxo, i.e., se as linhas de campo estão entrando ou saindo de um determinado volume elementar. Sendo assim, para o caso da Figura 12 acima, o divergente das linhas de campo magnético será nulo, pois elas não acumulam no interior do imã.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (75)$$

Neste caso, cada linha de  $\vec{B}$  estará associada a outro vetor chamado potencial vetor  $\vec{A}$ . Este vetor percorre o circuito fechado descrito por cada linha de campo. Portanto, havendo fluxo magnético, necessariamente haverá rotação de  $\vec{A}$ .

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (76)$$

Evidentemente, a equação (76) satisfaz o que fora afirmado por (77), pois o divergente do rotacional é sempre nulo.

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (77)$$



Como  $\vec{B}$  é obtido por diferenciação de  $\vec{A}$ , caso venhamos a ter outro potencial vetor, digamos  $\vec{A'}$ , cujo valor em relação ao primeiro difere apenas pelo acréscimo de uma constante,

$$\vec{A'} = \vec{A} + C \quad (78)$$

então,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A'} \quad (79)$$

Sendo assim, temos que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{\nabla} \times \vec{A'} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} - \vec{A'}) = 0 \quad (80)$$

Do cálculo sabemos que o rotacional do gradiente de uma função escalar é zero, de modo que  $C = \vec{\nabla} \psi$ . O que não altera em nada as propostas já feitas.

$$\vec{A} - \vec{A'} = \vec{\nabla} \psi \quad (81)$$

Integrando os dois lados da equação ao longo do caminho fechado das linhas de campo, temos que:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} - \oint \vec{A'} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{\nabla} \psi \cdot d\vec{s}$$

Pelo teorema de Stokes, vem que

$$\oint \vec{\nabla} \psi \cdot d\vec{s} = 0$$

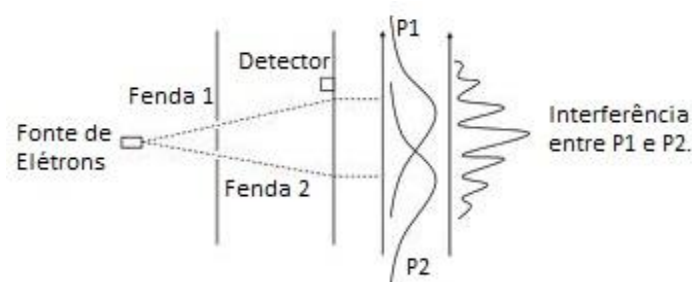
Portanto,

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{A'} \cdot d\vec{s} \quad (82)$$

A equação acima nos informa que mesmo que venha a ocorrer um acréscimo constante no potencial vetor, não importando quando nem onde, o fluxo magnético permanecerá o mesmo.

Um exemplo é a difração de elétrons sem a presença de  $\vec{B}$  que terá uma fase tal que quando na presença deste será alterada da mesma forma tanto por  $\vec{A'}$  quanto por  $\vec{A}$ . Vejamos como isso ocorre. [6]

### 3.3.2.2. Difração de Elétrons



**Figura 13 Difração de elétrons.**

No arranjo acima uma fonte de elétrons cuja carcaça está polarizada negativamente possui uma resistência de tungstênio que, por efeito térmico, gera elétrons que são acelerados pela fonte. Digamos que no anteparo no qual está localizado o detector móvel de elétrons há também um amplificador de ruídos que amplifica o som – semelhante a um “click” – gerado devido ao impacto dos elétrons. Com esse esquema, seremos capazes de saber qual será a distribuição de choques das partículas ao longo do eixo  $x$  no qual o detector se move.

O senso comum nos leva a ter a expectativa de que os elétrons incidentes ao atingirem o detector gerariam um padrão cujo resultado seria o equivalente à soma das probabilidades das partículas que passaram pela fenda um mais a daquelas que passaram

pela segunda fenda ( $P = P_1 + P_2$ ), sendo  $P_1 = |\psi_1|^2$  e  $P_2 = |\psi_2|^2$ . Mas, isso não ocorre realmente. O que acontece é que os elétrons, obviamente, atingem o anteparo como se fossem partículas, mas o padrão de probabilidade é idêntico ao formado pela interferência de duas ondas. E o mais intrigante é que mesmo não sabendo o que ocorre ao certo no percurso que a partícula fez até chegar ao anteparo, podemos somar as probabilidades como se estivéssemos lidando com ondas, ou seja, a soma deverá ser a soma do quadrado do módulo da amplitude de probabilidade da partícula vir pela fenda 1 ou 2.

$$P = |\psi_1 + \psi_2|^2 \quad (83)$$

O padrão de interferência visto na Figura 13 é decorrente da interferência entre os elétrons. Essa interferência é provocada pela diferença de fase entre a função de onda das partículas que passam pela fenda um e daquelas que provêm da fenda dois. Isso quer dizer que no caso de termos duas funções  $\psi_1 = C_1 e^{i\theta_1}$  e  $\psi_2 = C_2 e^{i\theta_2}$ , que descrevam o comportamento do elétron para cada uma das fendas, a diferença de fase será:

$$\theta_{(\vec{B}=0)} = \theta_1 - \theta_2 \quad (84)$$

Além disso, pela lei de Bragg podemos relacionar o comprimento de onda  $\lambda$  do elétron com a diferença de caminho percorrido entre os elétrons (ver Figura 14), da seguinte maneira:

$$\frac{\text{caminho do elétron}}{\lambda} = \frac{\text{diferença de fase}}{2\pi} \theta_{(\vec{B}=0)}$$

Desta forma, obtemos uma relação entre o comprimento de onda do elétron e sua diferença de fase, que se dá pela seguinte equação:

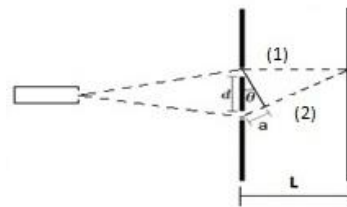
$$\theta_{(\vec{B}=0)} = \frac{a}{\lambda} \quad (85)$$

onde,

$a$  = diferença de caminho entre os elétrons;

$\lambda = \frac{h}{p} =$  comprimento de onda reduzido.

Para descrevermos melhor a equação (85) vamos escrevê-la em termos de  $x$ , onde, pela Figura 14, temos que:



**Figura 14** Diferença entre os caminhos percorridos pelos elétrons do feixe 1 e 2.

Então,

$$a = d \frac{x}{L} \quad (86)$$

Substituindo (86) em (85), temos:

$$\theta_{(B=0)} = \frac{x}{L} \frac{d}{\lambda} \quad (87)$$

Como já mencionado, todo campo magnético é acompanhado de um vetor cuja importância torna-se bem relevante em sistemas quânticos. Não obstante, o fluxo magnético modificará a fase do elétron em  $\frac{q}{h} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$ . Portanto, a fase na presença de  $\vec{B}$ , será:

$$\theta'_1 = \theta_{1(\vec{B}=0)} + \frac{q}{h} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}_{(1)}$$

e,

$$\theta'_2 = \theta_{2(\vec{B}=0)} + \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}_{(2)}$$

onde,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  referem-se às fases dos elétrons que fazem os caminhos pela fenda 1 e 2, respectivamente. Nesse sentido, segundo a equação (84), a diferença de fase será:

$$\theta' = \theta_{(\vec{B}=0)} + \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}_{(1-2)} \quad (88)$$

Essa alteração na fase provoca um deslocamento  $\Delta x = x + x_0$  na distribuição dos elétrons, onde  $x_0$  refere-se à nova posição do padrão de interferência no eixo de movimento do detector. Para determinar o valor de  $x_0$ , basta relacionar as fases antes e depois da presença de  $\vec{B}$ , conforme segue:

<i>Condição da fase</i> $\theta_{(\vec{B}=0)}$ $\theta'$	<i>fase em termos de x</i> $\frac{x}{L} \cdot \frac{d}{\lambda}$ $\frac{(x + x_0)}{L} \cdot \frac{d}{\lambda}$
--	--

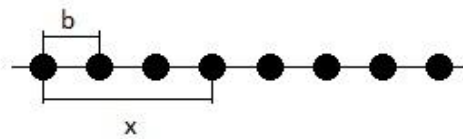
Fazendo essa relação, acharemos que

$$x_0 = \lambda \frac{L}{d} \cdot \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}_{(1-2)} \quad (89)$$

A equação (89) mostra que a alteração na posição no eixo de rastreamento não dependerá de onde a distribuição esteve antes, ou seja, não dependerá da posição inicial  $x$ . [6]

### 3.3.2.3. Elétron sob Influência Magnética

Agora vamos analisar um sistema quântico cuja interação do elétron não será apenas com o potencial elétrico, mas, além disso, estará sob a ação de um campo magnético  $\vec{B}$ .



**Figura 15** Arranjo linear de átomos igualmente espaçados.

Na Figura 15 temos uma linha formada por átomos sob a ação de  $\vec{B}$  perpendicular ao eixo  $x$ , e distantes de  $b$  entre si. Sendo assim, queremos saber como se dá o comportamento da evolução temporal dos estados quânticos para um elétron cuja referência é o átomo posicionado em  $x$ .

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial C(x)}{\partial t} = E_0 C(x) + ? \quad (90)$$

onde,

$$\psi(x, t) \equiv C(x) \equiv C_n$$

Sendo que  $C_n$  é a amplitude de probabilidade para o  $n^{\text{ésimo}}$  átomo.

Evidentemente, a contribuição de  $E_0 C(x)$  dá-se pelo fato de estarmos considerando um elétron inicialmente localizado em tal átomo. Sendo  $E_0$  a energia mínima para ocupar esta posição.

De acordo com o que vimos sobre a relação entre o potencial vetor e o fluxo de campo magnético, sabemos que o elétron sofre alteração de sua fase  $\theta_{(\vec{B}=0)}$  quando na presença de  $\vec{B}$ . Sabemos também que a integral do fluxo de  $\vec{B}$  normal a uma superfície  $\vec{da}$  é equivalente à integral de linha do potencial vetor  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  num circuito fechado. Portanto, a defasagem  $\phi$  pode ser calculada em termos de  $\vec{A}$ .

$$\phi = i \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot \vec{ds} \quad (91)$$

Considerando que  $\vec{A}$  estende-se apenas ao longo do eixo  $x$  e sofre variações desprezíveis podemos fazer  $\oint \vec{A} \cdot \vec{ds} = A_x(x, t) \cdot b$ , portanto, a fase será

$$\phi'_x = i \frac{q}{\hbar} A_x \cdot b$$

Substituindo  $f(x) = \frac{q}{\hbar} A_x$  na equação acima teremos uma função para a diferença de fase provocada pela presença do campo magnético para um elétron localizado no átomo localizado em  $x$ .

$$\phi'_x = ibf(x) \quad (92)$$

Portanto, a equação (90) completa deverá ser a seguinte.

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial C(x)}{\partial t} = E_0 C(x) - \left[ K \cdot C(x+b) e^{-ibf\left(x+\frac{b}{2}\right)} + K \cdot C(x-b) e^{ibf\left(x-\frac{b}{2}\right)} \right] \quad (93)$$

O sinal negativo antes do colchete representa uma atenuação na probabilidade do elétron estar no átomo localizado em  $x$ , podendo estar tanto no átomo à frente – onde representamos sua amplitude de probabilidade por  $C(x+b)$  – quanto no átomo na posição anterior, cuja amplitude de probabilidade é  $C(x-b)$ . Como estamos lidando com a probabilidade do elétron estar no átomo localizado em  $x$ , dizemos que o sinal negativo da fase no primeiro termo dentro das chaves nos informa que o elétron está “pulando” de volta para o átomo em  $x$ . Agora fica claro que a fase positiva do segundo termo dentro das chaves traz a informação de que o elétron está dando um salto para frente, ou seja, para o átomo em  $x$ . Além disso, o fato de o termo  $b$  do argumento de ambas as fases estar dividido por dois explica-se por considerar que o campo magnético é aproximadamente constante, daí, por questões técnicas, é preferível levar em conta o campo na metade do caminho. Essas questões técnicas a que nos referimos são as aproximações por série de Taylor que faremos para chegar à equação de Schrödinger para o sistema em questão. Por fim, temos que  $K$  refere-se à intensidade da amplitude necessária para que a partícula se movimente nesse arranjo atômico.

Como mencionado, precisamos dar um tratamento matemático à equação (93) e chegar numa solução para a equação de Schrödinger considerando um elétron sob a influência de forças magnéticas. O resultado, segundo o Anexo C, será:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial C(x)}{\partial t} = (E_0 - 2K)C(x) - Kb^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} - if(x) \right] \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x} - if(x) \right] C(x)$$

A equação acima pode ser reescrita de acordo com as variáveis anteriormente definidas.

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = (E_0 - 2K)\psi(\vec{r}, t) - Kb^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{q}{\hbar} A_x \right] \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{q}{\hbar} A_x \right] \psi(\vec{r}, t)$$

Daí, rearranjando os termos na forma espacial



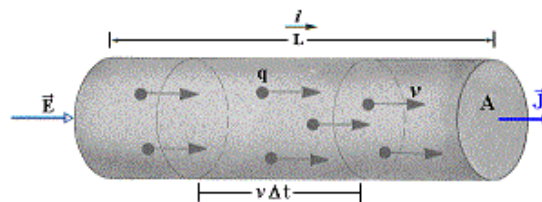
$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2m^*} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right) \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right) \psi(\vec{r}, t) + V_{op} \psi(\vec{r}, t) \quad (94)$$

Esta é justamente a equação a qual procurávamos, visto que na equação de Schrödinger (68) para o elétron livre há as duas contribuições do momentum para a energia cinética de translação que vemos na equação (94) - como era de se esperar. A diferença agora é que existe outra contribuição, aquela provocada pela ação do potencial vetor sobre a partícula.

Entende-se que na presença do campo magnético a partícula sofre uma desaceleração devido à ação negativa do momentum provocado pelo potencial vetor, reduzindo a energia cinética e, por sua vez, a densidade de estados quânticos do sistema.

### 3.3.3. Densidade de Corrente Elétrica e a Densidade de Probabilidade

Já vimos que a probabilidade de encontrarmos uma partícula é dada pelo módulo ao quadrado da sua função de onda. Mas, como sabemos, para que um dispositivo eletrônico funcione as cargas elétricas devem ser postas em movimento orientado através de caminhos condutores. Esse movimento deve ser compreendido como um fluxo por unidade de área o qual denominamos densidade de corrente elétrica  $\vec{J}$  (ver Figura 16).



**Figura 16 Densidade de corrente elétrica num fio condutor.**

Imaginemos um elemento de área desse condutor que, na falta de diferença de potencial (d.d.p.) a probabilidade de se encontrar o elétron mantém-se inalterada, assim,  $\vec{j}$  será nula. Porém, ao aplicarmos uma d.d.p.  $V$ , a probabilidade  $P$  irá variar com o tempo devido ao movimento orientado das cargas, havendo, portanto, um fluxo de elétrons através desse condutor no sentido contrário de  $V$  para compensar esse desequilíbrio energético. Então,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (95)$$

Isso implica que se a probabilidade está aumentando em uma determinada região, necessariamente ela deve estar diminuindo em outra.

Sendo assim, de (56) vem que:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \quad (96)$$

Para chegarmos à conclusão de que a hipótese da equação (95) é verdadeira vamos substituir (94) em (96) tomando os devidos cuidados para com o conjugado da função de onda  $\psi^*$  e chegar ao seguinte resultado (ver Anexo D):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \left\{ \frac{1}{2m^*} \left[ \psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\psi^* \vec{A} \right) \psi + \psi \left( -\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\psi \vec{A} \right) \psi^* \right] \right\} \quad (97)$$

Prova-se, desta forma, que se há variação na densidade de probabilidade do elétron, evidentemente há um fluxo orientado no sentido contrário de  $V$ , onde esse fluxo refere-se ao movimento de cargas por unidade de área. Portanto, relacionando (95) e (97) definimos  $\vec{j}$  como sendo:

$$\vec{j} = \left\{ \frac{1}{2m^*} \left[ \psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\psi^* \vec{A} \right) \psi + \psi \left( -\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\psi \vec{A} \right) \psi^* \right] \right\} \quad (98)$$

Esta equação relaciona a quantidade de movimento da partícula com sua densidade de probabilidade, indicando que o resultado da equação será real. Se imaginarmos que as cargas localizadas em um átomo delimitado por uma região cujo limite encontra-se no infinito, a probabilidade delas serem encontradas na superfície é nula, ou seja,  $\psi = 0$ . Então, a probabilidade total de encontrar as cargas estará dentro do volume limitado pela superfície. Assim, fazendo uma integral de volume no lado esquerdo de (95), corresponderá a uma integral de volume do divergente de  $\vec{j}$ , que é o mesmo que a integral de superfície de  $\vec{j}$ .

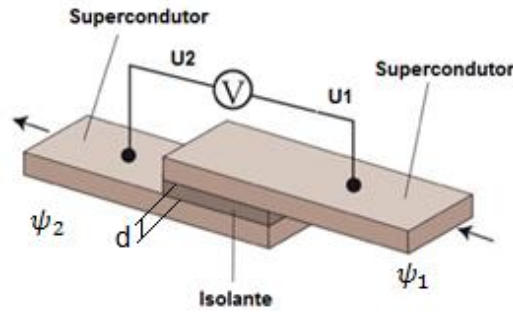
$$\iiint \frac{\partial P}{\partial t} dx dy dz = - \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dx dy dz = - \iint \vec{j} \cdot \vec{ds} \quad (99)$$

Se  $\psi$  for encontrada próxima da superfície, então, dizemos que há movimento de cargas.

### 3.4. Sólitons e o Efeito Josephson

#### 3.4.1. Junção Josephson

Dados dois filmes supercondutores separados por um isolante da ordem de 10Å existe uma probabilidade significativa de ocorrer tunelamento quântico dos pares de Cooper através deste.



**Figura 17 Supercondutor.**

A Figura 17 mostra que cada um dos supercondutores, lado 1 e lado 2, terá sua própria autofunção de onda,  $\psi_1$   $\psi_2$ , e que descreverá os estados quânticos dos pares de Cooper, porém, por conta do tunelamento haverá uma interdependência entre os estados dos pares de Cooper, a qual é descrita conforme segue.

$$\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = U_1 \psi_1 + K \psi_2 \quad (100)$$

$$\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = U_2 \psi_2 + K \psi_1 \quad (101)$$

Essa interdependência é vista através do fator  $K$ . Sendo os dois supercondutores homogêneos e apresentando a mesma quantidade de cargas, então a diferença de energia potencial entre ambos será  $U_2 - U_1 = 0$ . Entretanto, ao aplicarmos uma diferença de potencial  $V$  nos terminais, vemos que aparece um potencial entre os filmes supercondutores dada por:

$$U_1 - U_2 = qV \quad (102)$$

Fazendo um arranjo das equações desse sistema concluímos que (100) e (101) assumem a seguinte forma:

$$\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{qV}{2} \psi_1 + K \psi_2 \quad (103)$$

$$\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{qV}{2} \psi_2 + K \psi_1 \quad (104)$$

Ainda, assumindo que  $\psi_1 = \sqrt{\rho_1} e^{i\theta_1}$  e  $\psi_2 = \sqrt{\rho_2} e^{i\theta_2}$  e substituindo em (103) e (104) chegaremos a dois sistemas de equações complexas. Note que os termos que buscamos são as variáveis  $\dot{\rho}_1$ ,  $\dot{\theta}_1$ ,  $\dot{\rho}_2$  e  $\dot{\theta}_2$ , que correspondem às derivadas dessas funções no tempo.

De (103), temos

Componente imaginária:

$$\frac{\hbar}{2\sqrt{\rho_1}} \dot{\rho}_1 \cos\theta_1 - \hbar \dot{\theta}_1 \sqrt{\rho_1} \sin\theta_1 - \frac{qV}{2} \sqrt{\rho_1} \sin\theta_1 = K \sqrt{\rho_2} \sin\theta_2$$

Componente real:

$$-\frac{\hbar}{2\sqrt{\rho_1}} \dot{\rho}_1 \sin\theta_1 - \hbar \dot{\theta}_1 \sqrt{\rho_1} \cos\theta_1 - \frac{qV}{2} \sqrt{\rho_1} \cos\theta_1 = K \sqrt{\rho_2} \cos\theta_2$$

De (104), temos

Componente imaginária:

$$\frac{\hbar}{2\sqrt{\rho_2}} \dot{\rho}_2 \cos\theta_2 - \hbar \dot{\theta}_2 \sqrt{\rho_2} \sin\theta_2 + \frac{qV}{2} \sqrt{\rho_2} \sin\theta_2 = K \sqrt{\rho_1} \sin\theta_1$$

Componente real:

$$-\frac{\hbar}{2\sqrt{\rho_2}} \dot{\rho}_2 \sin\theta_2 - \hbar \dot{\theta}_2 \sqrt{\rho_2} \cos\theta_2 + \frac{qV}{2} \sqrt{\rho_2} \cos\theta_2 = K \sqrt{\rho_1} \cos\theta_1$$

Fazendo um sistema de equações para achar as variáveis desejadas por meio de determinantes, chegamos aos seguintes resultados.

$$\dot{\rho}_1 = \frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \delta$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos \delta - \frac{aV}{2\hbar}$$

$$\dot{\rho}_2 = -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \delta$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos \delta + \frac{aV}{2\hbar}$$

Sendo  $\rho_1$  e  $\rho_2$  as densidades de carga nos dois supercondutores, temos de levar em conta que o fluxo dessa corrente no tempo ocorre por meio do movimento de pares ligados de elétrons, portanto, o fluxo tem carga de  $2e$ .

$$J_T = 2e\dot{\rho}_1 = -2e\dot{\rho}_2 = \frac{4eK}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \delta \quad (105)$$

Esse é um dos efeitos estudados por Josephson, o tunelamento dos pares de Cooper aplicando-se um potencial contínuo. O termo  $\frac{4eK}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2}$  corresponde à corrente crítica  $J_c$  que tunela através do supercondutor. Sendo que esta dependerá da geometria do filme e da densidade de pares de Cooper.

Fazendo  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2$ , chegamos à segunda relação proposta por Josephson, que nos mostra que

$$\dot{\theta} = \frac{2eV}{\hbar} \quad (106)$$

em regime alternado haverá certa fase da corrente de tunelamento, cuja frequência é dada por  $f = \frac{2eV}{h}$ .

#### 3.4.1.1. Junção Pontual e Estendida

Para o caso simplificado, onde a dependência espacial da corrente no plano (x,y) pode ser ignorada, surge um campo magnético  $\vec{B}_0$  gerado por uma densidade total de corrente,  $\vec{J}_B$ . Neste caso, mostra-se que  $\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J}_B$ .

A corrente total numa junção real tem por componentes a supercorrente de tunelamento gerada pelo efeito Josephson  $J_T$ . Como contribuição também existe os elétrons que passam pela barreira isolante e que não formam os pares ligados, não estando no estado fundamental, portanto, sua contribuição é  $J_R = \frac{V}{RS}$ , sendo R a resistência da barreira e S sua área correspondente. Finalmente, uma terceira componente aparece devido aos efeitos capacitivos (cuja corrente é dada por  $\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$ ) da junção, descrita por  $\frac{C}{S} \frac{dV}{dt}$ . Sendo assim, a corrente total será:

$$J_B = J_T + \frac{V}{RS} + \frac{C}{S} \frac{dV}{dt} \quad (107)$$

Usando as equações (105) e (106) e fazendo  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2edj_c}{\hbar\varepsilon}}$ , reescrevemos (107) da seguinte forma:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin\theta = \frac{2eS}{C\hbar} J_B \quad (108)$$

Esta equação é semelhante ao sistema do pêndulo e é muito útil para junções que operam em regimes onde há ruído elétrico.

Agora, pensando numa junção estendida, onde a fase  $\theta$  e a tensão  $V$  dependerão de  $x$  e  $t$  e, além disso, fazendo com que a média da densidade de corrente atravessando o dispositivo seja constante, vamos deduzir a equação diferencial que rege esse sistema fazendo uso das equações de Maxwell levando em conta apenas a componente  $z$  da corrente através do isolante. Sendo assim, temos

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V(x, t)}{d} \right) = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (109)$$

Substituindo (106) em (109) e integrando no tempo, temos:

$$B_y = \frac{\hbar}{2ed} \frac{\partial \theta}{\partial x} + B_{0y}(x) \quad (110)$$

Fazendo ainda a projeção da equação de Maxwell para o campo magnético em  $z$  para  $B_{0y}$ , obtemos,

$$\vec{u}_z \left( \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 j_c \sin \theta + \frac{\mu_0}{RS} \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mu_0 \frac{C}{S} \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

Juntando com a equação (110) e definindo  $c_0^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon}$  obtemos uma equação não-linear conhecida como equação de sine-Gordon (SG) perturbada, conforme vemos abaixo:

$$\theta_{tt} - \theta_{xx} + \frac{1}{RC} \theta_t \omega_0^2 \sin \theta = \frac{2eS}{C\hbar} J_B \quad (111)$$

Assumindo que o isolante tem resistência alta pode-se esperar que a solução da equação (111) seja similar ao sóliton de (SG) – cuja solução é semelhante à metodologia aplicada para os sólitons elétricos – conforme segue:



$$\theta(x, t) = 4 \arctan \exp \left( i \frac{\omega_0}{c_0} \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{c_0^2}}} \right)$$

Os pulsos solitônicos têm sua amplitude associada com uma tensão externa, porém eles só são esperados quando sua largura, dada por  $L = \frac{\omega_0}{c_0} = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu_0 2 e d j_c}}$ . Esse potencial externo corresponde a um valor médio de:

$$V_n(x, t) = \frac{\hbar}{2e} \theta_t = \frac{\hbar}{2e} \frac{2\omega_0 v}{c_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{c_0^2}}} \operatorname{sech} \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{c_0^2}}}$$

onde,  $V_n(x, t)$  corresponde a pulsos específicos de sólitons, sendo  $n$  um número inteiro.

#### 3.4.1.2. Flûxon

Internamente o processo físico que ocorre na junção é a propagação de sólitons por meio de fluxos magnéticos quantizados. Isto se dá considerando que um pulso com perfil magnético na direção  $y$ ,

$$\vec{B}_1(x, t) = \frac{\hbar}{2ed} \frac{\partial \theta}{\partial x} \vec{u}_y$$

que terá um fluxo através da junção

$$\phi = \int \vec{B}_1(x, t) dx = d \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hbar}{2ed} \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{\hbar}{2e} [\theta(x, t)]_{-\infty}^{+\infty}$$

Se existirem N sólitons propagando-se na junção e, tomando  $\phi = N\phi_0$ , sendo  $\phi_0 = \frac{\hbar}{2e}$ , teremos um fluxo magnético quantizado, como de fato ocorre segundo dados experimentais.

## Conclusão

A equação de KdV é de grande importância tecnológica visto que sua descoberta possibilitou a compreensão de sistemas altamente complexos. Junto com isso temos a vantagem de poder controlar melhor os parâmetros envolvidos em sistemas não-lineares e dispersivos, posto que a metodologia permite extrair diversos parâmetros de controle como o fator de não-linearidade  $b$  na equação (55) e a quantidade  $n$  de células numa rede – também encontrada na equação (55) sob a forma  $n = \frac{x-vt}{\delta}$ .

Com exceção da junção Josephson estendida, todos os circuitos analisados foram considerados sem os efeitos dissipativos, portanto, na primeira análise os efeitos capacitivos e indutivos eram próprios da linha de transmissão e o sinal de tensão não sofreu alteração ao longo do espaço-tempo, caracterizando uma onda livre. Ao introduzirmos um elemento indutivo em paralelo, indutância parasitária, notamos que o pulso não mais teria o mesmo perfil à medida que se propagasse na linha de transmissão. Como observado, quando introduzimos um elemento capacitivo não-linear a velocidade de propagação dependerá da tensão aplicada. Desta forma, ao aplicar um sinal suficientemente grande o pico da onda irá se propagar com velocidade maior do que sua base, fazendo com que a onda perca sua característica ondulatória logo após o momento que esta se “quebra”.

Verificamos que em circuitos discretos (redes de transmissão) com elementos capacitivos não-lineares é possível obter uma onda que mantém seu perfil constante ao longo do tempo devido às características dispersivas e não-lineares da rede, mostrando que um efeito compensa o outro. A solução da equação diferencial que rege esses sistemas admite uma função hiperbólica quadrada (com perfil solitônico). Visto que o perfil de um sólton mantém-se ao longo do espaço-tempo e que este deve ser composto de diversas ondas propagando-se com a mesma velocidade, denominada velocidade de grupo, entendemos que a energia deste pacote de ondas deve conservar-se durante todo o percurso, sendo este um interessante aspecto, pois, dá margem a uma gama de aplicabilidade tecnológica, tendo em vista a necessidade de obtenção de tecnologias mais eficientes e sustentáveis, onde o papel da energia consumida é um fator decisivo.

Embora os efeitos da supercondutividade se manifestem em escala macroscópica sua compreensão depende sumariamente de conceitos que apenas a mecânica quântica pode manipular e explicar de forma lógica e estatisticamente previsível. Desta forma, com o objetivo de compreender melhor a propagação de sólitons em materiais supercondutores, iniciamos essa etapa do projeto com alguns dos conceitos fundamentais da física quântica, os operadores. Ao longo do projeto notamos as vantagens de se utilizar essa ferramenta, principalmente quando queremos extrair grandezas importantes das funções que regem os fenômenos envolvendo o movimento de partículas elementares – como os elétrons.

Como o elétron é uma partícula era de se esperar que este seguisse as leis da mecânica clássica, ou seja, a distribuição de choques de dois feixes de elétrons deveria, a rigor, ser um padrão gaussiano. Porém, o comportamento do elétron em sistemas atômicos geralmente não reflete aquilo que se prevê através da física clássica como, por exemplo, no caso do caminho percorrido por esta partícula quando incidida por uma fonte de elétrons em um anteparo com duas fendas visto no estudo sobre difração de elétrons. Neste caso, ao contrário do que se esperava, a distribuição dos choques deverá ser tal que a soma das probabilidades reflita a interferência que ocorre com as fases de cada partícula, indicando um fenômeno de caráter ondulatório. Vimos que a equação de Schrödinger pode nos informar, além das grandezas relacionadas ao movimento, qual deverá ser a densidade de probabilidade do elétron. Se o potencial do sistema for contínuo, então a solução dependerá apenas das variáveis espaciais.

O comportamento do elétron sob ação de campo magnético leva em conta um artifício matemático extremamente eficaz, os potenciais vetores “gerados” por essas linhas de campo que, quando agem sobre partículas em movimento provocam o deslocamento da fase de onda. As implicações dessas alterações da fase na equação de Schrödinger são que o potencial vetor reduz a densidade de estados do sistema – desacelerando as partículas. A relação da densidade de probabilidade com a densidade de corrente elétrica  $\vec{j}$  mostra que  $\vec{j}$  só existe quando  $P$  sofre variações devido à aplicação de um potencial  $V$ . Posto isto, observamos que os sólitons nas junções Josephson propagam-se na forma de fluxons, ou seja, fluxo magnético quantizado, sendo este descrito pela equação de Sine-Gordon perturbada.

## Anexo A: Polinômio de Taylor sem Resto

Dada uma função  $f$  qualquer, representa-se por uma série de potências de  $(x - c)$  a seguinte somatória,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n \\ &= a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 + \dots + a_n(x - c)^n \end{aligned}$$

(A.1)

onde  $c$  é o valor onde se deseja fazer a aproximação por uma série infinita, no nosso caso a Série de Taylor. Seu domínio é o intervalo de convergência da série, sendo esta contínua neste intervalo, podendo assumir derivadas em toda sua extensão (deve-se tomar cuidado apenas com os extremos do intervalo, pois a convergência pode sofrer distorções significativas).

Como  $f$  é contínua no intervalo determinado façamos a diferenciação termo a termo da série acima até a terceira ordem, por exemplo, para acharmos qual é a forma de  $a_n$ .

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - c) + 3a_3(x - c)^2 + 4a_4(x - c)^3 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - c)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + (2.3)a_3(x - c) + (3.4)a_4(x - c)^2 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x - c)^{n-2}$$

$$f'''(x) = (2.3)a_3 + (2.3.4)a_4(x - c) \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n(x - c)^{n-3}$$

Para  $k$  inteiro, temos:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) a_n (x-c)^{n-k}$$

Fazendo  $k = n$  e  $x = c$ , temos:

$$f(c) = a_0;$$

$$f'(c) = a_1;$$

$$f''(c) = 2a_2;$$

$$f'''(c) = 2.3. a_3$$

Portanto,

$$f^{(n)}(c) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \dots (1) a_n = n! a_n$$

Resolvendo os termos independentes da nossa sequência e os substituindo na série (1), então:

$$f(x) = f(c) + f'(c).(x-c) + \frac{f''(c)}{2}.(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{2.3}(x-c)^3 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

(A.2)

Portanto, assumindo que as funções tratadas neste projeto possuem as condições necessárias para serem expandidas em séries de potência – Taylor no caso – não iremos tratar aquelas que apresentam restos, ou seja, quando  $x \neq c$ , ainda que muito próximo e no intervalo de convergência. Dessa forma será suficiente a utilização da expansão acima conforme segue:

$$f(x) = f(c) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n$$

## Anexo B: Visão Geral sobre Série e Transformada de Fourier

Dada uma função  $f(\theta)$  num intervalo  $0 \leq \theta < 2\pi$  que possa ser expandida em série de Fourier:

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \quad (\text{B.1})$$

Podemos achar uma forma mais geral para essa expansão e seus coeficientes  $A_n$  e  $B_n$  de forma que relacionemos  $\theta$  com  $x$ , onde  $x$  tenha período  $L$ . Sendo assim, a partir de uma análise periódica, temos que:

$$\theta = \frac{2\pi x}{L}$$

Portanto, de (B.1), vem que

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{2\pi nx}{L} + B_n \sin \frac{2\pi nx}{L} \right) \quad (\text{B.2})$$

Para determinar os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$ , basta multiplicar os dois lados da equação acima por  $\cos \frac{2\pi nx}{L}$  ou  $\sin \frac{2\pi nx}{L}$  e integrar ambos, de forma que:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2\pi nx}{L} dx$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2\pi nx}{L} dx$$

Geralmente a maneira mais usual de representar a série de Fourier é na sua forma complexa:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \quad (\text{B.3})$$

onde, para determinarmos o coeficiente  $a_n$  multiplicamos os dois lados da equação por  $e^{-\frac{2\pi i m x}{L}}$  e integramos, mas, sabendo que:

$$\int_0^L e^{-\frac{2\pi i m x}{L}} \cdot e^{\frac{2\pi i n x}{L}} dx = L \cdot \delta_{mn}$$



onde  $\delta_{mn}$  é denominado Delta de Kronecker, sendo que, por definição:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$$

Então, para o caso em que  $\delta_{mn} = 1$ , temos:

$$\frac{1}{L} \int_0^L f(x) \cdot e^{\frac{-2\pi imx}{L}} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \delta_{mn} = a_m \quad (\text{B.4})$$

Que é correspondente ao coeficiente  $a_n$  dado por (3).

Agora, vamos achar uma função  $g(y)$  que se relaciona através de  $f(x)$  de forma que a primeira seja a Transformada de Fourier da segunda – valendo o caso contrário, onde  $f(x)$  é a transformada de  $g(y)$ .

Definindo as seguintes condições:

$$y = \frac{2\pi n}{L} \rightarrow dn = \frac{L}{2\pi} dy \quad F_n = F(y) \quad (\text{B.5})$$

$$g(y) = L \cdot a_n = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cdot e^{\frac{-2\pi imx}{L}} dx$$

Analisaremos o caso em que  $L \rightarrow \infty$ . Onde o somatório de uma função enésima corresponde a:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n = \int_{-\infty}^{\infty} F_n dn = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) dy \quad (\text{B.6})$$

Portanto, aplicando as propriedades de (6) em (3), temos que:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ixy} = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cdot e^{-ixy} dx \right) e^{ixy} dy$$

Portanto, as Transformadas de Fourier das funções analisadas serão

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy} dy \quad g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ixy} dx$$

Substituindo uma equação na outra e rearranjando os termos, obtemos a seguinte relação:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') dx' \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(x-x')} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x-x') dx'$$

Como sabemos a partir das propriedades da distribuição Delta de Dirac a integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x-x') dx' = f(x)$ .

## Anexo C: Aproximações Discretas para a Evolução Temporal dos Estados Quânticos de um Elétron Sob Influência Magnética

Para a equação fenomenológica (93) - descrita abaixo sob o índice (C.1) – é possível fazer uma expansão em torno de  $x$  no intervalo de convergência  $[-b, b]$ . Isso significa que as distâncias entre os átomos são tão insignificantes que podemos dizer que o elétron poderá caminhar entre esses espaços. [6], [7] e [10]

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial C(x)}{\partial t} = E_0 C(x) - K \left[ C(x+b) e^{-ibf\left(x+\frac{b}{2}\right)} + C(x-b) e^{ibf\left(x-\frac{b}{2}\right)} \right] \quad (C.1)$$

Expandindo  $C(x+b)$ ,  $C(x-b)$ ,  $f\left(x+\frac{b}{2}\right)$ ,  $f\left(x-\frac{b}{2}\right)$  e as duas exponenciais em séries de Taylor (ver Anexo A) até as derivadas de segunda ordem:

$$C(x+b) = C(x) + bC'(x) + \frac{b^2}{2}C''(x) \quad (C.2)$$

$$C(x-b) = C(x) - bC'(x) + \frac{b^2}{2}C''(x) \quad (C.3)$$

$$f\left(x+\frac{b}{2}\right) = f(x) + \frac{b}{2}f'(x) + \frac{b^2}{8}f''(x) \quad (C.4)$$

$$f\left(x-\frac{b}{2}\right) = f(x) - \frac{b}{2}f'(x) + \frac{b^2}{8}f''(x) \quad (C.5)$$

Para expandir as exponenciais temos de lembrar que

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2}$$

Portanto,

$$e^{-ibf\left(x+\frac{b}{2}\right)} = 1 - ibf\left(x+\frac{b}{2}\right) - \frac{b^2}{2}f^2\left(x+\frac{b}{2}\right) \quad (\text{C.6})$$

$$e^{ibf\left(x-\frac{b}{2}\right)} = 1 + ibf\left(x-\frac{b}{2}\right) - \frac{b^2}{2}f^2\left(x-\frac{b}{2}\right) \quad (\text{C.7})$$

Substituindo as equações C.2, C.3, C.6 e C.7 no lado esquerdo de C.1 e, ainda, definindo  $C(x) \rightarrow C$ , teremos:

$$\begin{aligned} E_0 C - K \left[ 1 - ibf\left(x+\frac{b}{2}\right) - \frac{b^2}{2}f^2\left(x+\frac{b}{2}\right) \right] \cdot \left[ C + bC' + \frac{b^2}{2}C'' \right] \\ - K \left[ 1 + ibf\left(x-\frac{b}{2}\right) - \frac{b^2}{2}f^2\left(x-\frac{b}{2}\right) \right] \cdot \left[ C - bC' + \frac{b^2}{2}C'' \right] \end{aligned}$$

Agora, vamos substituir C.4 e C.5 na equação acima, fazer a distributiva e eliminar os termos em comum.

$$E_0 C - 2KC - Kb^2[C'' - 2ifC' - if'C - f^2C] \quad (\text{C.8})$$

onde,  $f(x) \rightarrow f$ . Então, rearranjando os termos em **B. 8**, temos:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial C(x)}{\partial t} = (E_0 - 2K)C - Kb^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} - if \right] \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x} - if \right] C \quad (\text{C.9})$$

## Anexo D: Dedução da Equação de Continuidade

Substituindo a equação de Schrödinger para um meio sob ação de campo magnético na equação(96), teremos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar} \psi^* \left[ \frac{1}{2m^*} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right) \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right) \psi + q\phi\psi \right] \\ & + \frac{i}{\hbar} \psi^* \left[ \frac{1}{2m^*} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + q\vec{A} \right) \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + q\vec{A} \right) \psi + q\phi\psi \right]\end{aligned}$$

Fazendo a distributiva no primeiro termo, colocando  $-\frac{1}{2m}$  em evidência, teremos

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{2m^*} \left[ \psi^* \left( \vec{\nabla} - \frac{i}{\hbar} q\vec{A} \right) \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi - q\vec{A} \psi \right) - \psi \left( \vec{\nabla} + \frac{i}{\hbar} q\vec{A} \right) \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi^* + q\vec{A} \psi^* \right) \right]$$

Tomando cuidado para não trocar de posição nenhum termo da equação acima, vamos fazer a distributiva e obter:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} = & -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{\hbar}{i} \psi^* \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi - q\psi^* \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \psi - q\psi^* \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \psi + \frac{i}{\hbar} q^2 A^2 \psi^* \psi - \frac{\hbar}{i} \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi^* \right. \\ & \left. - q\psi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \psi^* - q\psi \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \psi^* - \frac{i}{\hbar} q^2 A^2 \psi \psi^* \right]\end{aligned}$$

Simplificando vamos usar a seguinte propriedade:

$$\vec{\nabla} \cdot f\vec{F} = f\vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \vec{\nabla} f$$

Então, rearranjando os termos conforme segue:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{\hbar}{i} \psi^* \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi - q(\psi^* \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \psi + \psi \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \psi^*) - \frac{\hbar}{i} \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi^* - q(\psi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \psi^* + \psi^* \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \psi) \right]$$

teremos,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{\hbar}{i} \psi^* \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi - q \vec{\nabla} \cdot \psi^* \vec{A} \psi - \frac{\hbar}{i} \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi^* - q \vec{\nabla} \cdot \psi \vec{A} \psi^* \right]$$

Assim, para continuarmos temos de isolar o gradiente aplicando novamente a propriedade já mencionada da seguinte forma:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{\hbar}{i} (\psi^* \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi + \vec{\nabla} \psi^* \cdot \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi^* - \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi^*) - \vec{\nabla} \cdot (q \psi^* \vec{A} \psi + q \psi \vec{A} \psi^*) \right]$$

Desta forma, teremos:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \cdot (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) - \vec{\nabla} \cdot (q \psi^* \vec{A} \psi + q \psi \vec{A} \psi^*) \right]$$

Evidenciando o divergente,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{2m^*} \vec{\nabla} \cdot \left[ \left( \frac{\hbar}{i} \psi^* \vec{\nabla} \psi - q \psi^* \vec{A} \psi \right) + \left( -\frac{\hbar}{i} \psi \vec{\nabla} \psi^* - q \psi \vec{A} \psi^* \right) \right]$$

Assim, rearranjando os termos, obtemos o divergente proposto por (95)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \left\{ \frac{1}{2m^*} \left[ \psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q \psi^* \vec{A} \right) \psi + \psi \left( -\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q \psi \vec{A} \right) \psi^* \right] \right\}$$

## Bibliografia

- [1] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. Gravitação, Ondas e Termodinâmica, LTC, 8ª edição, 2009.
- [2] Nussenzveig, H. M. Curso de Física Básica. Volume 2. Editora Edgard Bluche, (1997).
- [3] Drazin, P. G., Johnson, R.S., Solitons: an introduction, Press Syndicate of the University of Cambridge, New York, 1996, 1ª edição.
- [4] Remoissenet, M., Waves Called Sólitons: Concepts and Experiments, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999, 3ª edição revisada.
- [5] Eisberg, R., Resnick, R., Física Quântica: Átomos, Moléculas, Núcleos e Partículas, Editora Campus Ltda., Rio de Janeiro, 1994, 8ª edição.
- [6] Feynman, R., Lectures on Physics, Pearson Education, 1964, Vol. 3
- [7] Simmons, G. F. Cálculo com Geometria Analítica, Pearson Makron Books, São Paulo, 1988, Vol. 2, 2ª edição
- [8] Sergio, M. R., Materiais e Dispositivos Eletrônicos, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004, 2ª edição.
- [10] Swokowski, E. W., Cálculo com Geometria Analítica, Editora McGraw-Hill Ltda., São Paulo, 1994., Vol. 2, 2ª edição.
- [11] Mathews, J., R, Walker (1970). Mathematical Methods of Physics, 2ª edição.
- [12] Aguiar, Marcus A.M. (2006) A FUNÇÃO DELTA DE DIRAC - Notas de aula de Mecânica Quântica I.

## Sites

- [13] Fleming, H. <http://www.hfleming.com/qm31.pdf>