

FACULDADE DE TECNOLOGIA DE SÃO PAULO

**JOSIVANIR GOMES CÂMARA**

Sólitons Mecânicos

São Paulo

2018

FACULDADE DE TECNOLOGIA DE SÃO PAULO

**JOSIVANIR GOMES CÂMARA**

Sólitons Mecânicos

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Tecnologia de São Paulo como requisito para obtenção do título de Tecnólogo em Materiais.

Orientadora:

Prof. Dra. Regina Maria Ricotta

São Paulo

2018

*À minha família, em especial a minha mãe,  
pelo contínuo incentivo e apoio.*

## **AGRADECIMENTOS**

Inicialmente agradeço a todos que de maneira direta ou indireta ajudaram a concretizar esse trabalho, em especial a todos os colegas do curso, destacando a ajuda fundamental da minha namorada, Stéfany Senas Figueiredo, em todos os semestres da graduação.

Agradeço a toda a minha família, que sempre me deu força para chegar até aqui. Aqui faço um agradecimento especial à minha mãe, por todos os sacrifícios realizados não só para a minha graduação, mas para a realização dos sonhos de todos os meus irmãos.

Agradeço a professora Regina Maria Ricotta por toda a ajuda durante o desenvolvimento deste trabalho, sendo fundamental para a sua conclusão, além do grande apreço, admiração e confiança passadas durante todo esse período.

Agradeço a todos os meus professores pelo conhecimento a mim transmitido, em especial aos professores Davinson Mariano da Silva e Vanessa Duarte Del Cacho que me serviram de motivação e exemplo em muitos momentos.

Agradeço ao CNPq pela bolsa de Iniciação Científica concedida.

## RESUMO

O principal objetivo desse trabalho é mostrar como um sistema mecânico relativamente simples de pêndulos conectados por molas, pode representar com bastante precisão fenômenos que envolvem a presença de sólitons, e que até bem pouco tempo eram desconhecidos (se comparado com o tempo que compreende o conhecimento científico atual), e não só isso, mas como esse sistema é eficiente em prever particularidades que seriam dificilmente observadas e detectadas experimentalmente. Para tanto, foram desenvolvidos os conceitos fundamentais sobre a propagação das ondas a partir da análise de ondas unidimensionais em uma corda. Em seguida, analisaram-se os casos de ondas dispersivas, dissipativas e não lineares, que constituem sistemas representados por equações mais complexas que as ondas livres. A partir desse ponto abordaram-se os Sólitons, que são representados por equações não lineares e dispersivas, com a característica especial de que a não linearidade anula a dispersão. Entre os vários tipos de equações solitônicas, analisaram-se duas em especial: a equação de Korteweg-de Vries (KdV) e a equação de Sine-Gordon (SG). O estudo desta última, porém, foi feito em detalhe, através de uma rede de pêndulos acoplados por molas, observando-se que esse sistema descreve soluções localizadas (sólitons) do tipo Kink e Antikink, que se movimentam em sentidos opostos na rede. Na sequência, procurou-se uma expressão para a energia associada à rede de pêndulos e assim relacioná-la à energia do kink. Observou-se então que o sóliton kink pode ser considerado como uma partícula relativística de energia  $E_k$ , massa  $m_0$ , e momento  $p_k$ . A natureza corpuscular dessas ondas foram observadas no estudo de colisões de sólitons kink-kink e kink-antikink. A partir desse ponto, observaram-se várias propriedades do Kink, inclusive o fato dele poder ser estático.

Palavras-chave: Sólitons. Equação de Sine-Gordon. Soluções Kink e Antikink.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$k$	Número de onda
$\omega$	Frequência Angular de Oscilação/vibração de onda
$\omega_0$	Frequência Angular Natural de vibração de onda (estado fundamental)
$y_x$	Derivada de primeira ordem em relação a $x$
$y_{xx}$	Derivada de segunda ordem em relação a $x$
$y_{xxx}$	Derivada de terceira ordem em relação a $x$
$A$	Constante arbitrária
$i$	Número imaginário
$v_g$	Velocidade de grupo de um pacote de ondas
$\beta$	Constante elástica de torção da mola
$\theta$	Ângulo de rotação de cada pêndulo
$\Delta\theta$	Deslocamento angular do pêndulo em relação a seu vizinho mais próximo
$m$	Massa de cada pêndulo
$g$	Aceleração da gravidade
$L$	Comprimento dos pêndulos
$h$	Altura dos pêndulos da oscilação em relação a posição de equilíbrio
$H$	Hamiltoniana que representa a energia total do sistema
$I$	Momento de inércia referente a massa e a disposição dos pêndulos
$c_0$	Velocidade da luz
$d$	Parâmetro que relaciona a $c_0$ e $\omega_0$
$a$	Distância entre os pêndulos
$T$	Variável temporal que relaciona $\omega_0$ e o tempo $t$
$X$	Variável espacial que relaciona $c_0$ e $\omega_0$
$u$	Velocidade arbitrária de propagação
$s$	Variável dependente de $u$
$E_k$	Energia associada ao movimento do sóliton Kink
$p_k$	Momento angular relativístico do sóliton Kink
$\varphi$	Ângulo introduzido para simplificação ( $\varphi = \theta/4$ )

- $F$  Função arbitrária dependente apenas de  $X$
- $G$  Função arbitrária dependente apenas de  $T$
- $q$  Constante arbitrária cujo valor depende do tipo de solução kink.
- $b$  Constante arbitrária cujo valor depende do tipo de solução kink.
- $n$  Constante arbitrária cujo valor depende do tipo de solução kink.
- $b'$  Constante arbitrária de simplificação que relaciona  $b$  e  $q$ .
- $b''$  Constante arbitrária de simplificação que relaciona  $b$  e  $q$ .
- $y_T$  Derivada de primeira ordem em relação a  $T$
- $y_{TT}$  Derivada de segunda ordem em relação a  $T$

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	8
2	DESENVOLVIMENTO .....	10
2.1	Ondas dispersivas e não-lineares: Equação de Korteweg-de Vries....	10
2.2	Equação de Sine-Gordon.....	16
2.2.1	Ondas lineares no limite de baixa amplitude .....	20
2.2.2	Soluções tipo Kink: Ondas com grandes amplitudes.....	22
2.2.3	Contração de Lorentz de um sóliton tipo kink.....	28
2.2.4	Propriedades Particulares de um Sóliton Kink.....	31
2.2.5	Solução Sóliton Kink.....	38
2.2.6	Solução Colisão Kink-Kink.....	39
2.2.7	Solução Breather .....	41
2.2.8	Solução Colisão kink-antikink .....	43
3	CONCLUSÃO .....	46
4	REFERÊNCIAS .....	47

## 1 INTRODUÇÃO

Uma definição para Sólitons consiste em considerá-los como ondas não lineares e dispersivas onde a não linearidade e a dispersão se anulam mutuamente. Mas aqui podem surgir no mínimo duas perguntas, “o que são ondas não lineares?” e “o que são ondas dispersivas?”. Dessa forma, o início deste estudo analisa ondas unidimensionais em uma corda (ondas livres), que são representadas por equações lineares, e posteriormente ondas representadas por equações mais complexas [1].

Na natureza, de modo geral, é difícil observar ondas livres, as situações práticas frequentemente envolvem ondas dispersivas, dissipativas ou não lineares, que possuem, cada uma, seus respectivos termos característicos. No decorrer do projeto avaliaram-se os tipos de soluções de cada um desses sistemas, e na sequência concentrou-se no caso particular de onda não linear e dispersiva, criando condições de existência de uma classe de ondas extremamente estáveis conhecidas como Sólitons [2].

Os sólitons foram observados e estudados inicialmente no século XIX pelo engenheiro John Scott Russell, que observou uma “onda solitária” em forma de um sino se deslocando em um canal de um rio. Segundo a descrição histórica, ele seguiu a onda em forma de pulso à cavalo, e observou que ela se propagou por longas distâncias no canal sem perder sua forma nem sua amplitude. Esse fato o intrigou, e ele decidiu buscar alguma expressão matemática que representasse o fenômeno que ele tinha presenciado [3].

A partir desse conceito inicial de Sóliton, estudaram-se dois tipos de equações solitônicas: a equação de Korteweg-de Vries (KdV) e a equação de Sine-Gordon (SG). Tanto a KdV como a SG são equações de onda que reúnem não linearidade e dispersão, que se anulam mutuamente. Porém a SG, foi obtida através de um sistema de pêndulos conectados por molas, cujas soluções aproximadas recebem o nome de soluções do tipo Kink e Antikink, pois nesse caso, sempre temos uma propagação nos dois sentidos, um Sóliton Kink indo da direita para a esquerda associado com outro da esquerda para a direita no sistema de pêndulos horizontal [4].

A partir desse ponto, iniciou-se uma nova etapa do projeto, a saber, o estudo do movimento dos pêndulos acoplados por molas, ou seja, direcionado a equação de Sine-Gordon. O objetivo é determinar uma expressão matemática para a energia do sóliton Kink (e Antikink) descrito por esse movimento. Assim, por utilizar, nesse cálculo, a solução proposta para a equação de Sine-Gordon, a expressão matemática encontrada para essa energia é, mesmo que bastante precisa, também uma aproximação [5].

É importante, também destacar alguns casos particulares das soluções da equação de Sine-Gordon: a solução colisão kink-kink, isto é, sólitons no mesmo sentido mas com velocidades diferentes que se encontram e continuam seu movimento após a colisão como se a mesma não tivesse acontecido; a solução sóliton *breather*, em que a energia se concentra de forma localizada e oscilatória, como um respiro; e a solução colisão kink-antikink, encontro com as mesmas características da colisão kink-kink, porém os kinks aqui estão em sentidos opostos e permanecem em sentidos opostos após a colisão [5].

Um exemplo bastante interessante relacionado com a equação de Sine-Gordon é de ser possível associar a cada sóliton representado pelo movimento dos pêndulos, um número inteiro positivo ou negativo, igual ao número de rotações completas na rede. Este número inteiro associado a uma onda do tipo sóliton é uma quantidade conservada; quando dois sólitons interagem resulta, associado àquele momento da colisão, em um o novo número, a soma dos dois primeiros. Um sóliton pode ter qualquer número inteiro positivo ou negativo. Assim sendo, pode-se somar e subtrair com os sólitons, o que leva a pensar que eles podem ser utilizados em calculadoras eletrônicas, utilizando-se para isso princípios do efeito Josephson [6].

Outra característica, é que devido as propriedades particulares dos sólitons, além de ondas, eles também são apropriados para representar partículas elementares [7].

## 2 DESENVOLVIMENTO

Neste capítulo são apresentados os conceitos e os objetivos principais do projeto, demonstrando-se a dedução da equação de Sine-Gordon, e da equação da energia do Kink-Antikink, além de algumas outras particularidades da interação entre essas ondas localizadas.

### 2.1 Ondas dispersivas e não-lineares: Equação de Korteweg-de Vries

Em uma corda finita, propagam-se, de modo geral, simultaneamente, ondas progressivas nos dois sentidos, por exemplo, para a direita e para a esquerda em uma corda horizontal. Define-se então, as funções

$$f(x - vt) \tag{2.1.1}$$

$$e g(x + vt), \tag{2.1.2}$$

representando a propagação para a direita e para a esquerda respectivamente, com velocidade  $v$  [1].

Tais funções são variáveis no espaço e no tempo e, nesse caso, se combinam para formar o perfil da onda, dado por

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt). \tag{2.1.3}$$

A Figura 1 mostra uma onda se propagando para a direita (eq. 2.1.1). Observando-se a onda em outro referencial  $O'x'y'$ , que coincide com  $Oxy$  para  $t = 0$ , mas se desloca com a velocidade  $v$  da onda ao longo de  $Ox$ , o perfil da onda não muda (perfil constante) com o tempo nesse novo referencial, ou seja,

$$y'(x', t) = y'(x', 0) = f(x'),$$

$f$  é uma função somente de  $x'$ .

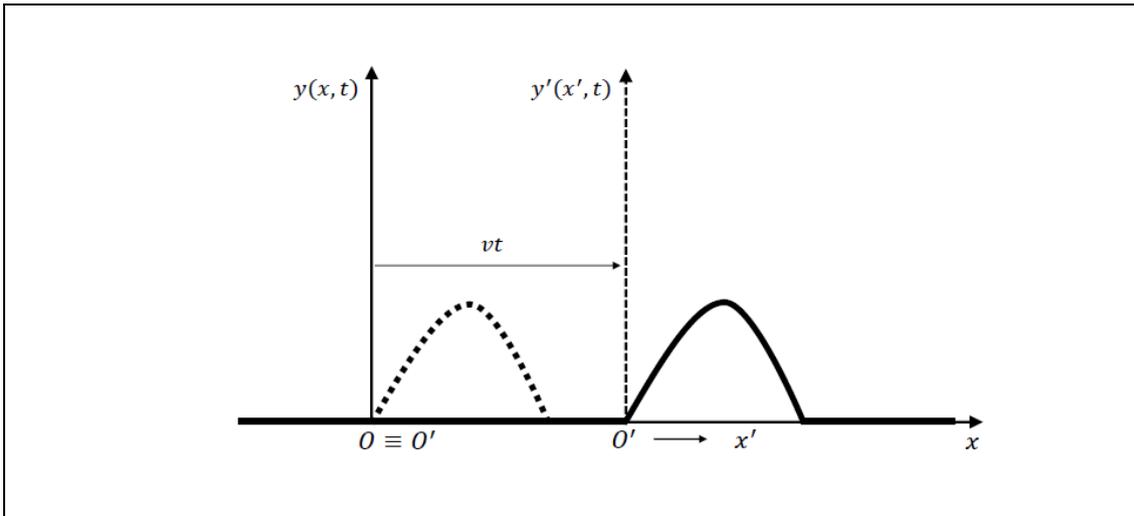


Figura 1. Onda livre se propagando para a direita [1].

A primeira equação representando ondas livres (na corda) foi proposta por d'Alembert no século XVIII, conhecida como equação de onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1.4)$$

que é uma equação diferencial parcial de segunda ordem nas variáveis  $x$  e  $t$ . Observa-se assim, que a equação (2.1.3) é solução geral da equação (2.1.4).

A equação (2.1.4) admite soluções harmônicas do tipo

$$y(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)},$$

onde  $A$  é uma constante arbitrária,  $k$  é o número de onda, e  $\omega$  é a frequência angular de oscilação. Assim, tem-se

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \omega^2 Ae^{i(kx - \omega t)} \quad e \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = k^2 Ae^{i(kx - \omega t)}.$$

Substituindo-se essas duas relações acima em (2.1.4)

$$\omega^2 Ae^{i(kx - \omega t)} - v^2 (k^2 Ae^{i(kx - \omega t)}) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = v^2 k^2$$

$$\Rightarrow v = \frac{\omega}{k},$$

que é uma relação bastante importante entre essas três grandezas relacionadas as ondas.

Observa-se que as ondas descritas pela equação (2.1.4) satisfazem o princípio de superposição, visto que são representadas por equações lineares, e que elas sofrem interferências, construtivas ou destrutivas, dependendo da diferença de fase entre elas [1].

Em seguida, nota-se que a equação (2.1.4) pode ser fatorada em dois termos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \mp v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} \pm v \frac{\partial}{\partial x} \right) y = 0$$

e conclui-se que as equações

$$y_t + v y_x = 0 \quad (2.1.5a)$$

$$e \quad y_t - v y_x = 0, \quad (2.1.5b)$$

também satisfazem a equação (2.1.4), onde define-se

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y_t \quad e \quad \frac{\partial y}{\partial x} = y_x. \quad (2.1.6)$$

Assim, pode-se afirmar que todas as soluções de cada uma das equações (2.1.5a) e (2.1.5b), também são soluções de (2.1.4).

Fazendo  $v = 1$  (para facilitar os cálculos), temos que a equação (2.1.5a) representa uma equação de onda (livre) do tipo

$$y_t + y_x = 0, \quad (2.1.7)$$

cujo perfil de onda é dado por  $y(x, t) = f(x - t)$ .

Em seguida, analisaram-se os casos de ondas dispersivas, dissipativas e não lineares, que diferem da equação (2.1.7) por um termo característico de cada tipo de equação de onda [2].

Considera-se, primeiro, o caso de ondas dispersivas, caracterizadas pelo termo dispersivo ( $y_{xxx} = \partial^3 y / \partial x^3$ ), definido pela seguinte equação de onda:

$$y_t + y_x + y_{xxx} = 0. \quad (2.1.8)$$

Considerando-se, para essa equação, uma solução harmônica do tipo

$$y(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.1.9)$$

tem-se

$$-i\omega A e^{i(kx-\omega t)} + ikA e^{i(kx-\omega t)} + i^3 k^3 A e^{i(kx-\omega t)} = 0$$

$$\Rightarrow -i\omega + ik + i^3 k^3 = 0$$

$$\Rightarrow \omega = k + i^2 k^3$$

ou seja, para que (2.1.9) seja solução de (2.1.8),

$$\omega = k - k^3, \tag{2.1.10}$$

de modo que,  $k$  é o número de onda e  $\omega$  é a frequência angular.

As expressões do tipo (2.1.9) que satisfazem a equação (2.1.7) descrevem ondas que se propagam, por definição, com velocidade

$$v = \frac{\omega}{k},$$

assim,

$$v = \frac{k - k^3}{k}$$

$$\Rightarrow v = 1 - k^2.$$

Isso mostra que ondas que possuem diferentes números de onda se propagam com velocidades diferentes, e isso é o que caracteriza uma onda como dispersiva [2].

Outro aspecto desse tipo de onda, que pode ser citado, é que apesar de possuírem uma velocidade linear de propagação, de cada componente da onda, elas possuem também uma velocidade de grupo,  $v_g$ , que é a velocidade de propagação de energia, isto é, existem pacotes de onda que se repetem e que se movem, por definição, com velocidade

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

No caso em estudo,

$$v_g = 1 - 3k^2.$$

Por outro lado, substituindo (2.1.10) na equação (2.1.9), tem-se

$$y(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} = Ae^{i(kx - (k - k^3)t)} = Ae^{i(kx - kt + k^3 t)}$$

$$\Rightarrow y(x, t) = [Ae^{i(kx - kt)}] \cdot [e^{itk^3}]. \quad (2.1.11)$$

Na equação (2.1.11), o termo da esquerda representa uma onda livre onde  $\omega = k$  ( $v = 1$ ), enquanto o termo da direita representa um termo dispersivo.

Isso quer dizer que ondas representadas pela equação (2.1.8) dispersam energia à medida que se propagam [2].

O segundo caso refere-se a ondas dissipativas, caracterizadas pelo termo dissipativo ( $-y_{xx}$ ),  $y_{xx} = \partial^2 y / \partial x^2$ , obtendo-se a seguinte equação de onda:

$$y_t + y_x - y_{xx} = 0. \quad (2.1.12)$$

Considerando-se uma solução harmônica do tipo (2.1.9) para a equação (2.1.12), implica

$$\omega = k - ik^2. \quad (2.1.13)$$

Utilizando um cálculo similar ao caso anterior, tem-se que uma solução da equação (2.1.12) tem a seguinte estrutura

$$y(x, t) = [Ae^{i(kx - kt)}] \cdot [e^{-tk^2}]. \quad (2.1.14)$$

Como no caso das ondas dispersivas, o termo da esquerda representa uma onda livre onde  $\omega = k$ , ( $v = 1$ ), enquanto que o termo da direita, nesse caso, descreve um decaimento exponencial com o passar do tempo, que é chamado de dissipação. Observa-se que o sinal do termo dissipativo na equação (2.1.12) é importante, pois ele influencia o sinal negativo do expoente do lado direito da solução (2.1.14).

No terceiro caso, analisam-se ondas não lineares, caracterizadas pelo termo não linear ( $yy_x$ ), obtendo-se uma equação de onda não linear:

$$y_t + y_x + yy_x = 0, \quad (2.1.15)$$

Ou ainda,

$$y_t + (1 + y)y_x = 0. \quad (2.1.16)$$

A equação (2.1.16) sugere que a equação (2.1.15) pode ser entendida como uma variação da equação (2.1.5a) onde

$$v = 1 + y.$$

E pode-se escrever uma solução geral da equação (2.1.15) como

$$y(x, t) = f(x - vt) = f(x - (1 + y)t), \quad (2.1.17)$$

onde  $f$  é uma função arbitrária.

Ao contrário das ondas lineares, soluções harmônicas não satisfazem as ondas não lineares, ou seja, não se pode determinar relações entre  $\omega$  e  $k$ , tal que a equação (2.1.9) seja solução de (2.1.15). Também nota-se que as ondas não lineares não satisfazem várias propriedades das lineares, como por exemplo, o princípio de superposição.

Com base nos três casos anteriores, analisa-se um caso especial de onda que reúne tanto não linearidade quanto dispersão, conhecida como equação de Korteweg-de Vries (KdV) [2], representada de maneira geral por

$$y_t + \frac{\alpha\beta}{\gamma} y y_x + \frac{\beta}{\gamma^3} y_{xxx} = 0, \quad (2.1.18)$$

onde  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são números reais.

Uma escolha conveniente desses três números, por exemplo, tem como resultado uma forma bastante utilizada dessa equação, representada por

$$y_t - 6y y_x + y_{xxx} = 0. \quad (2.1.19)$$

A equação de KdV representa uma classe de ondas conhecidas como sólitons, caracterizadas por soluções estáveis e localizadas. Isso acontece quando a não linearidade anula a dispersão, garantindo estabilidade a onda [2].

Ondas desse tipo foram observadas pela primeira vez no século XIX no canal de um rio, e como o nome sugere, sólito, pode ser entendida como uma onda “solitária”, porém que pode se propagar por longas distâncias sem mudar sua forma (onda de perfil constante). Pode-se dizer que, o que mais chamou a atenção do seu descobridor (John Scott Russell), foi sua grande estabilidade, isto é, além de percorrer grandes distâncias (no canal do rio), a massa de água

que se elevou para formar o pulso mantinha praticamente a mesma amplitude inicial durante todo o trajeto observado [3].

Porém, nem todas as estruturas de soluções localizadas e estáveis (sólitons) são descritas pela equação (2.1.18 ou 2.1.19) ou por alguma de suas variações. Dessa forma, uma nova categoria de sólitons pode ser obtida por uma equação conhecida como equação de Sine-Gordon (SG) [4].

## 2.2 Equação de Sine-Gordon

Como a equação de KdV, a SG envolve tanto não-linearidade quanto dispersão. Essa equação, que possui uma excepcional estabilidade, pode ser obtida através de uma rede de  $n$  pêndulos conectados por molas, como na Figura 2.

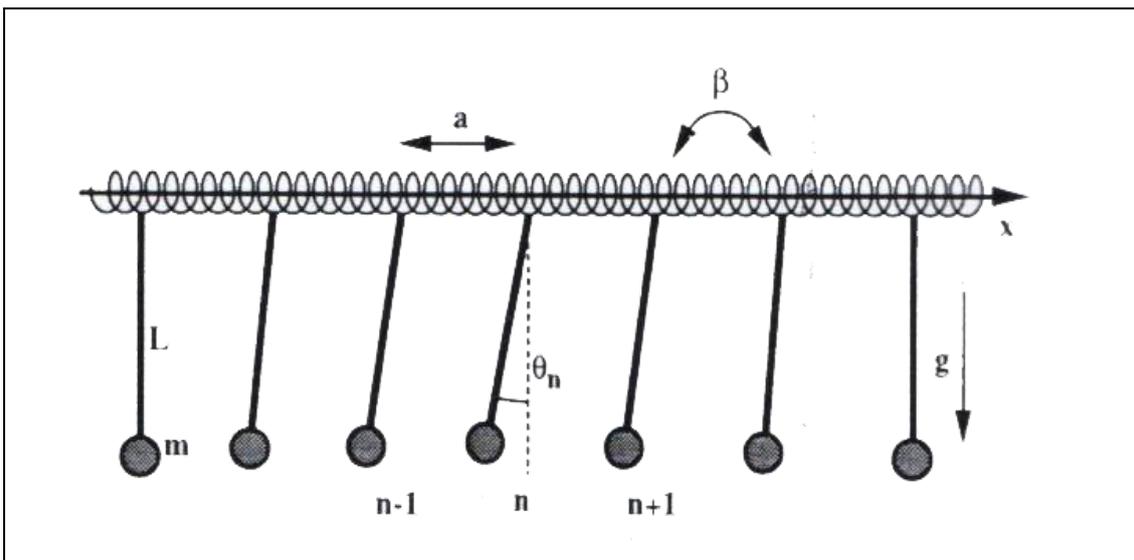


Figura 2. Redes de Pêndulos conectados por molas [5].

Associando-se os termos de energia cinética rotacional, energia elástica (molas) e energia potencial gravitacional, a equação do movimento do  $n$ ésimo pêndulo do sistema é dado por [5]

$$H = \sum_n \left[ \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{d\theta_n}{dt} \right)^2}_{\text{Energia Cinética Rotacional } (E_r)} + \underbrace{\frac{\beta}{2} (\theta_n - \theta_{n-1})^2}_{\text{Energia Potencial Elástica } (E_\beta)} + \underbrace{mgL(1 - \cos \theta_n)}_{\text{Energia Potencial Gravitacional } (E_g)} \right]. \quad (2.2.1)$$

onde  $H$  é a Hamiltoniana que representa a energia total do sistema.

A energia cinética rotacional ( $E_r$ ) é analisada sobre o seguinte aspecto

$$\omega_n = \frac{d\theta_n}{dt} \Rightarrow E_r = \frac{1}{2} I \left( \frac{d\theta_n}{dt} \right)^2,$$

onde  $\omega_n$  é a velocidade angular de rotação e  $I$  é o momento de inércia referente a massa e a disposição dos pêndulos.

A energia potencial elástica ( $E_\beta$ ) é analisada sobre o seguinte aspecto

$$\Delta\theta = \theta_n - \theta_{n-1} \Rightarrow E_\beta = \frac{1}{2} \beta (\Delta\theta)^2,$$

onde  $\Delta\theta$  é o deslocamento angular do enésimo pêndulo em relação a seu vizinho mais próximo com relação a um movimento no sentido de  $\theta_{n-1} \rightarrow \theta_n$ , e  $\beta$  é uma constante elástica de torção da mola entre cada um dos pêndulos.

Já a energia potencial gravitacional ( $E_g$ ) é analisada sobre o aspecto da Figura 3.

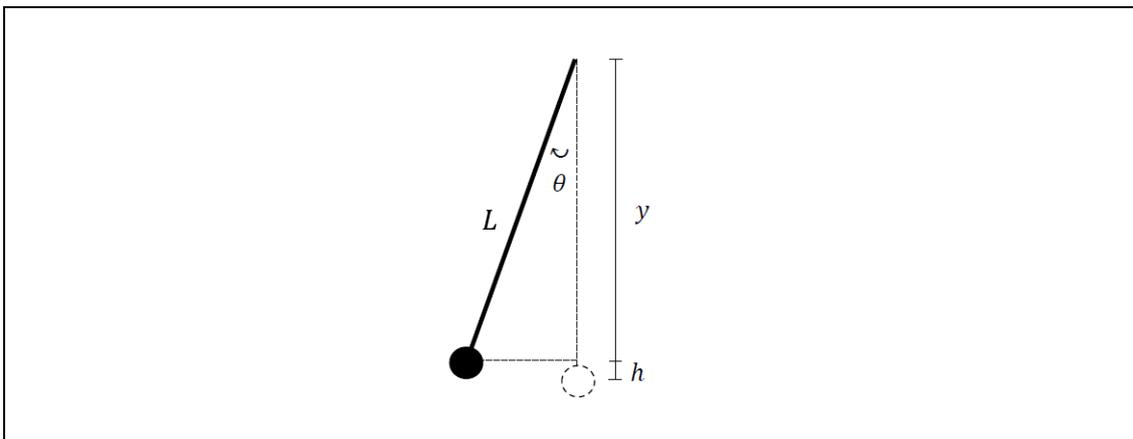


Figura 3. Determinação da altura  $h$  em função de  $L$  e  $\theta$  [Fonte Pessoal].

$$E_g = mgh \quad e \quad h = L - y \Rightarrow E_g = mg(L - y).$$

Pode-se observar na Figura 3, que

$$\cos \theta = y/L \Rightarrow y = L \cos \theta \Rightarrow h = L - L \cos \theta \Rightarrow h = L(1 - \cos \theta).$$

Logo,

$$E_g = mgL(1 - \cos \theta).$$

onde  $m$  é a massa de enésimo pêndulo,  $g$  é a aceleração da gravidade que puxa o pêndulo para a posição de equilíbrio e  $L$  é o comprimento dos pêndulos.

Por outro lado, pela conservação de energia (energia total constante),

$$\frac{dH}{dt} = 0 \rightarrow \sum_n \left[ \frac{I}{2} 2 \frac{d\theta_n}{dt} \frac{d^2\theta_n}{dt^2} + \frac{\beta}{2} \frac{d[\theta_n^2 + \theta_{n-1}^2 - 2\theta_n\theta_{n-1}]}{dt} + mgL \sin \theta_n \frac{d\theta_n}{dt} \right] = 0. \quad (2.2.2)$$

A partir da equação (2.2.2), tem-se

$$\sum_n \left[ I \frac{d\theta_n}{dt} \frac{d^2\theta_n}{dt^2} + \frac{\beta}{2} \left( 2\theta_n \frac{d\theta_n}{dt} + 2\theta_{n-1} \frac{d\theta_{n-1}}{dt} - 2\theta_{n-1} \frac{d\theta_n}{dt} - 2\theta_n \frac{d\theta_{n-1}}{dt} \right) + mgL \sin \theta_n \frac{d\theta_n}{dt} \right] = 0,$$

que leva a

$$\sum_n \left[ I \frac{d\theta_n}{dt} \frac{d^2\theta_n}{dt^2} + \beta \left( (\theta_n - \theta_{n-1}) \frac{d\theta_n}{dt} - (\theta_n - \theta_{n-1}) \frac{d\theta_{n-1}}{dt} \right) + mgL \sin \theta_n \frac{d\theta_n}{dt} \right] = 0. \quad (2.2.3)$$

Abaixo está representado uma expansão da equação (2.2.3) para  $n = 1$ ,  $n = 2$  e  $n = 3$ .

$$\begin{aligned} & \dots + \left[ I \frac{d\theta_1}{dt} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \beta \left( (\theta_1 - \theta_0) \frac{d\theta_1}{dt} - (\theta_1 - \theta_0) \frac{d\theta_0}{dt} \right) + mgL \sin \theta_1 \frac{d\theta_1}{dt} \right] \\ & + \left[ I \frac{d\theta_2}{dt} \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \beta \left( (\theta_2 - \theta_1) \frac{d\theta_2}{dt} - (\theta_2 - \theta_1) \frac{d\theta_1}{dt} \right) + mgL \sin \theta_2 \frac{d\theta_2}{dt} \right] \quad (2.2.4) \\ & + \left[ I \frac{d\theta_3}{dt} \frac{d^2\theta_3}{dt^2} + \beta \left( (\theta_3 - \theta_2) \frac{d\theta_3}{dt} - (\theta_3 - \theta_2) \frac{d\theta_2}{dt} \right) + mgL \sin \theta_3 \frac{d\theta_3}{dt} \right] + \dots = 0 \end{aligned}$$

Que pode ser agrupado como

$$\begin{aligned} & \dots + \left[ I \frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2} - \beta(\theta_2 + \theta_0 - 2\theta_1) + mgL \sin \theta_1 \right] \frac{d\theta_1}{dt} \\ & + \left[ I \frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2} - \beta(\theta_3 + \theta_1 - 2\theta_2) + mgL \sin \theta_2 \right] \frac{d\theta_2}{dt} \quad (2.2.5) \\ & + \left[ I \frac{\partial^2\theta_3}{\partial t^2} - \beta(\theta_4 + \theta_2 - 2\theta_3) + mgL \sin \theta_3 \right] \frac{d\theta_3}{dt} + \dots = 0 \end{aligned}$$

Ou na forma geral

$$\sum_n \left[ I \frac{\partial^2\theta_n}{\partial t^2} - \beta(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n) + mgL \sin \theta_n \right] \frac{d\theta_n}{dt} = 0. \quad (2.2.6)$$

O produto de duas quantidades resultando em zero, implica que uma delas (ou ambos) é igual a zero. Dessa forma, pode-se escrever a equação (2.2.6) na forma

$$I \frac{\partial^2 \theta_n}{\partial t^2} - \beta(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n) + mgL \sin \theta_n = 0 \quad (2.2.7)$$

Ou ainda,

$$\frac{\partial^2 \theta_n}{\partial t^2} - \frac{\beta}{I}(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n) + \frac{mgL}{I} \sin \theta_n = 0 \quad (2.2.8)$$

A solução exata para a equação (2.2.7) não é conhecida, mas uma solução bastante precisa consiste na aproximação no limite do contínuo, considerando que a distância  $a$  entre os pêndulos é muito pequena, e dessa forma, cada pêndulo sofre influência apenas de seus dois vizinhos [5]. Condição que pode ser descrita como

$$\beta \gg mgL \quad \text{ou} \quad \frac{c_0^2}{a^2} \gg \omega_0^2 \quad (2.2.9a)$$

e reescrita na forma

$$\frac{c_0}{\omega_0} = d \gg a. \quad (2.2.9b)$$

Por outro lado, a expansão de Taylor de  $\theta_{n\pm 1}$  até a quarta potência [5] implica

$$\theta_{n\pm 1} = \theta_n \pm a \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \pm \frac{a^3}{3!} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + \frac{a^4}{4!} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4}.$$

Dessa forma,

$$\theta_{n+1} + \theta_{n-1} = 2\theta_n + 2 \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2 \frac{a^4}{4!} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} \quad (2.2.10)$$

Considerando-se uma variação muito pequena de  $\theta$ , tem-se

$$\left( a^4 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} \right) \rightarrow 0$$

E pode-se escrever a relação (2.2.10) como

$$\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n \cong a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \left( a^4 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} \right) \cong a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (2.2.11)$$

com aproximação em segunda ordem [4].

Substituindo a relação (2.2.11) na equação (2.2.8), chega-se a

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\beta}{I} a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{mgL}{I} \sin \theta = 0. \quad (2.2.12)$$

Definindo-se ainda as seguintes quantidades

$$\omega_0^2 = \frac{mgL}{I} \quad e \quad c_0^2 = \frac{\beta a^2}{I} \quad (2.2.13)$$

representando o quadrado da frequência angular de oscilação e o quadrado da velocidade linear de propagação do pulso pelos pêndulos respectivamente [4].

Substituindo (2.2.13) em (2.2.12), tem-se a equação de Sine-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0. \quad (2.2.14)$$

Portanto, a equação (2.2.14) não é exatamente igual à equação (2.2.1), mas é uma boa aproximação considerando-se pequenas variações de  $\theta$ .

Um olhada rápida na equação (2.2.14), não permite identificar que ela contém dispersão e não linearidade, mas na verdade, essas duas entidades estão representadas combinadas pela mesma expressão,  $\omega_0^2 \sin \theta$ , que pode ser escrita como  $\omega_0^2 [\theta + (\sin \theta - \theta)] = \omega_0^2 \theta + \omega_0^2 (\sin \theta - \theta)$ . A dispersão é dada pela parte linear  $\omega_0^2 \theta$ , enquanto a não linearidade é dada por  $\omega_0^2 (\sin \theta - \theta)$ , que através de uma expansão pode ser representada por  $\omega_0^2 \left[ -\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right]$ .

### 2.2.1 Ondas lineares no limite de baixa amplitude

Para pequenas amplitudes (de oscilação dos pêndulos) na equação (2.2.14), temos por aproximação uma equação simplificada com  $\theta \ll 1 \rightarrow \sin \theta \cong \theta$ , conhecida como Klein-Gordon (KG) [4]:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (2.2.1.1)$$

Esta é uma equação de dispersão linear, onde como visto,  $\omega_0^2 \theta$  é o termo dispersivo.

Admitindo-se soluções do tipo

$$\theta = \theta_0 \cos(kx - \omega t), \quad (2.2.1.2)$$

cuja representação é uma onda plana, tem-se

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial[-\theta_0(-\omega) \sin(kx - \omega t)]}{\partial t} = -\theta_0 \omega^2 \cos(kx - \omega t)$$

$$e \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial[-\theta_0 k \sin(kx - \omega t)]}{\partial x} = -\theta_0 k^2 \cos(kx - \omega t).$$

Substituindo-se essas relações na equação (2.2.1.1), observa-se que

$$-[\theta_0 \omega^2 \cos(kx - \omega t)] - c_0^2 [-\theta_0 k^2 \cos(kx - \omega t)] + \omega_0^2 [\theta_0 \cos(kx - \omega t)] = 0$$

$$\Rightarrow [\theta_0 \cos(kx - \omega t)] [-\omega^2 + c_0^2 k^2 + \omega_0^2] = 0$$

$$\Rightarrow -\omega^2 + c_0^2 k^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = c_0^2 k^2 + \omega_0^2$$

De onde tem-se a seguinte relação de dispersão

$$\omega = \sqrt{c_0^2 k^2 + \omega_0^2} \quad (2.2.1.3)$$

Observa-se, nesse tipo de equação, que  $\omega_0$  é uma frequência de corte: o número de onda  $k$  é imaginário se  $\omega < \omega_0$ , isto é, ondas com frequência abaixo de  $\omega_0$  não podem se propagar [4].

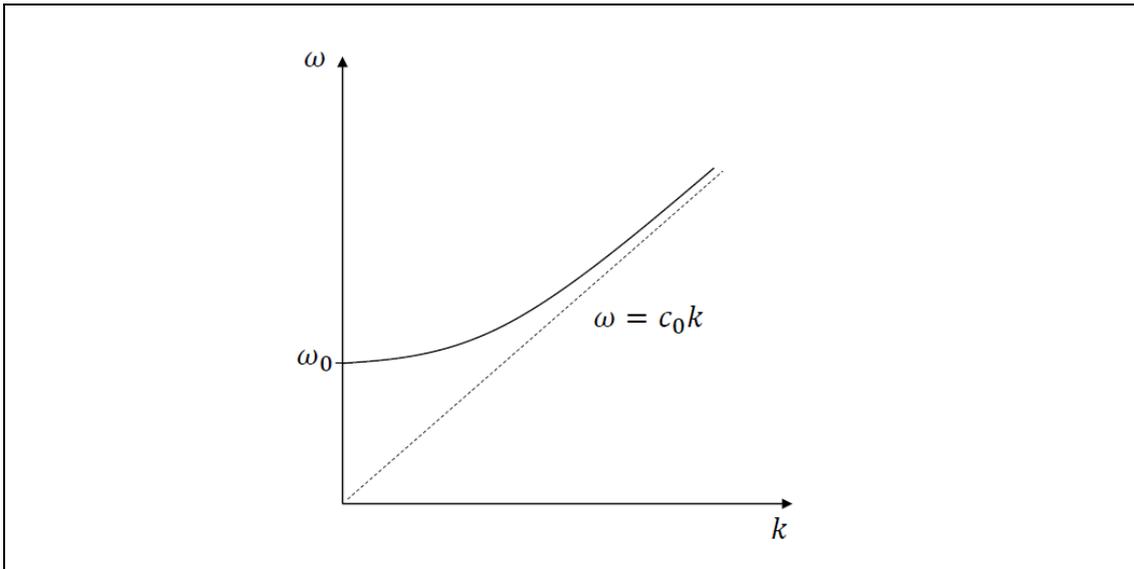


Figura 4. Relação de dispersão para pequenas amplitudes de ondas [4].

### 2.2.2 Soluções tipo Kink: Ondas com grandes amplitudes

Para grandes amplitudes, temos uma classe de sólitons conhecida como solução tipo Kink, que se propagam simultaneamente nos dois sentidos, de forma que, se temos um kink se propagando para a direita, temos um antikink vindo da esquerda [5].

Para tornar esse tipo de equação mais familiar e representativa é feita uma série de substituições e rearranjos matemáticos que ajudaram a entender melhor a essência e particularidades de sua solução.

Inicialmente, dividindo-se equação de SG (eq. 2.2.14) por  $\omega_0^2 \neq 0$ , obtendo-se

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{c_0^2}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \sin \theta = 0. \quad (2.2.2.1)$$

Utilizando a seguir a substituição

$$\omega_0 t = T \quad e \quad \frac{\omega_0}{c_0} x = X, \quad (2.2.2.2a)$$

tem-se

$$\partial T^2 = \omega_0^2 \partial t^2 \quad e \quad \partial X^2 = \frac{\omega_0^2}{c_0^2} \partial x^2. \quad (2.2.2.2b)$$

Aplicando-se as relações (2.2.2.2b) na equação (2.2.2.1), tem-se

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \sin \theta = 0. \quad (2.2.2.3)$$

Procura-se agora por soluções localizadas de perfil permanente dado na forma

$$\theta = \theta(s) = \theta(X - uT), \quad (2.2.2.4)$$

onde  $s = X - uT$ , e  $\theta \rightarrow 0$  e  $\partial\theta/\partial s \rightarrow 0$ , quando  $s \rightarrow \pm\infty$ , com  $s$  uma variável dependente de  $u$ , que é uma velocidade arbitrária de propagação.

Observa-se ainda que,

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{\partial\theta}{\partial X} dX + \frac{\partial\theta}{\partial T} dT \\ \Rightarrow d\theta &= \frac{\partial\theta}{\partial s} \left( \frac{\partial s}{\partial X} \right) dX + \frac{\partial\theta}{\partial s} \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right) dT \\ \Rightarrow d\theta &= \frac{\partial\theta}{\partial s} (1) dX + \frac{\partial\theta}{\partial s} (-u) dT \\ \Rightarrow d\theta &= \frac{\partial\theta}{\partial s} dX - u \frac{\partial\theta}{\partial s} dT \end{aligned}$$

Dessa forma, pode-se escrever

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial s} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial T} = -u \frac{\partial}{\partial s} \quad (2.2.2.5)$$

De modo que a equação (2.2.2.3) se reduz a Equação Diferencial Ordinária

$$\begin{aligned} -u \frac{\partial}{\partial s} \left( -u \frac{\partial\theta}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial\theta}{\partial s} \right) + \sin \theta &= 0 \\ \Rightarrow u^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + \sin \theta &= 0 \\ \Rightarrow (1 - u^2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} &= \sin \theta \\ \Rightarrow (1 - u^2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial s} \right) &= \sin \theta \left( \frac{\partial\theta}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

Observa-se também que

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 2 \frac{d\theta}{ds} \frac{d^2\theta}{ds^2} \quad e \quad \sin \theta \left( \frac{d\theta}{ds} \right) = - \frac{d(\cos \theta)}{ds}$$

Portanto, na sequência pode-se escrever

$$\begin{aligned} (1-u^2) \frac{1}{2} \int \frac{d}{ds} \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 &= - \int \frac{d(\cos \theta)}{ds} ds \\ \Rightarrow \frac{(1-u^2)}{2} \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 &= -\cos \theta + C \quad C = cte \end{aligned}$$

Ou ainda

$$\frac{d\theta}{ds} = \sqrt{\frac{2(C - \cos \theta)}{(1-u^2)}} \quad (2.2.2.6)$$

Buscando-se soluções localizadas onde  $\theta \rightarrow 0$  e  $\partial\theta/\partial s \rightarrow 0$ , quando  $s \rightarrow \pm\infty$  isso implica que  $C = 1$ .

Integrando essa equação, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\theta(s_0)}^{\theta(s)} \frac{d\theta}{\sqrt{2(1-\cos \theta)}} &= \int_{s_0}^s \sqrt{\frac{1}{1-u^2}} ds \\ \Rightarrow \pm \frac{(s-s_0)}{\sqrt{1-u^2}} &= \int_{\theta(s_0)}^{\theta(s)} \frac{d\theta}{\sqrt{2(1-\cos \theta)}} \end{aligned}$$

Observa-se ainda que

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

E que

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\cos \theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2}}$$

O que implica que

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{(1-\cos \theta)}} = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \ln \left( \tan \frac{\theta}{4} \right)$$

E pode-se concluir que

$$\int_{\theta(s_0)}^{\theta(s)} \frac{d\theta}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\theta(s_0)}^{\theta(s)} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}} = \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \ln \left( \tan \frac{\theta}{4} \right) \right]_{\theta(s_0)}^{\theta(s)}$$

$$\Rightarrow \int_{\theta(s_0)}^{\theta(s)} \frac{d\theta}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}} = \left[ \ln \left( \tan \frac{\theta}{4} \right) \right]_{\theta(s_0)}^{\theta(s)}$$

Assim tem-se que

$$\pm \frac{(s-s_0)}{\sqrt{1-u^2}} = \ln \left( \tan \frac{\theta(s)}{4} - \tan \frac{\theta(s_0)}{4} \right)$$

Para simplificar os cálculos, considera-se que

$$\ln \left( \tan \frac{\theta(s_0)}{4} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\theta(s_0)}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\theta(s_0)}{4} = \frac{n\pi}{4}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$\Rightarrow \theta(s_0) = n\pi$$

E dessa forma, tem-se

$$\pm \frac{(s-s_0)}{\sqrt{1-u^2}} = \ln \left( \tan \frac{\theta(s)}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\theta}{4} = \exp \left( \pm \frac{(s-s_0)}{\sqrt{1-u^2}} \right)$$

O que leva a

$$\theta = 4 \tan^{-1} \left[ \exp \left( \pm \frac{(s-s_0)}{\sqrt{1-u^2}} \right) \right]. \quad (2.2.2.7)$$

A equação (2.2.2.7) representa uma solução localizada (“onda solitária”), isto é, um sólton, que viaja com velocidade  $-1 < u < 1$ . Os sinais ( $\pm$ ) da solução corresponde a ondas que se propagam em sentidos opostos (simétricos), que são chamadas de soluções tipo kink (e antikink), que estão representadas na Figura 5 como uma função de  $s$ , com  $s_0 = 0$ .

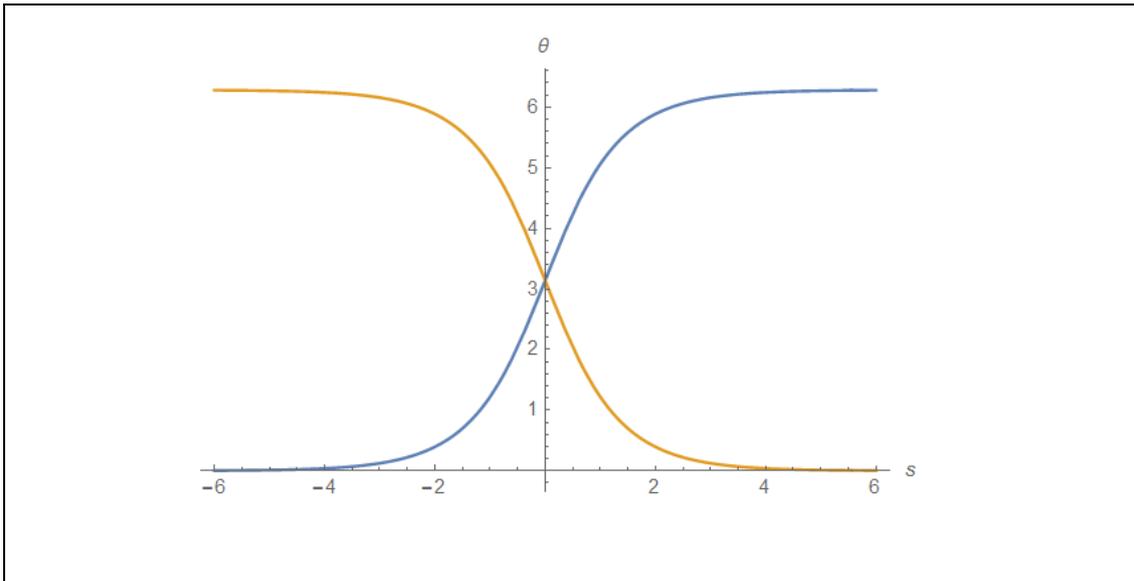


Figura 5. Representação de uma forma de onda kink (azul) e antikink (laranja) como função de  $s = X - uT$ ,  $u = 0,5$  [Fonte Pessoal].

Quando  $s$  vai de  $-\infty$  para  $+\infty$ , a rotação do pêndulo de  $0$  para  $2\pi$  representa uma solução kink, e de  $0$  para  $-2\pi$  uma solução antikink. Supõe-se um kink se movendo da esquerda para a direita, e após a reflexão no fim do sistema de pêndulos, este se torna um antikink no sentido oposto, movendo-se da direita para a esquerda.

Um ponto interessante a destacar, é que através da relação (2.2.2.5) e da equação (2.2.2.7), observa-se que a derivada espacial ( $\partial\theta/\partial X$ ), que é o gradiente do ângulo de rotação, pode ser calculado separadamente como função de  $s$ .

Para facilitar os cálculos define-se a seguinte grandeza

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \quad (2.2.2.8)$$

Posteriormente a razão dessa escolha ficará mais clara, mas por enquanto isso permite reescrever a equação (2.2.2.7) como

$$\theta = 4 \tan^{-1}[\exp(\pm\gamma s)]. \quad (2.2.2.9)$$

Observa-se também que por definição

$$\frac{\partial s}{\partial X} = \frac{\partial(X - uT)}{\partial X} = 1$$

assim

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial s} \quad (2.2.2.10)$$

A partir da equação (2.2.2.9) e (2.2.2.10), pode-se concluir que

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{4\gamma e^{\gamma s}}{1 + e^{2\gamma s}} = 2\gamma \cdot 2 \cdot \frac{e^{\gamma s}}{1 + e^{2\gamma s}}$$

Que leva a

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 2\gamma \operatorname{sech}(\gamma s) \quad (2.2.2.11)$$

De modo semelhante, a derivada temporal ( $\partial\theta/\partial T$ ), que corresponde à velocidade de rotação do kink (ou antikink), pode ser calculada através das equações (2.2.2.5) e (2.2.2.11), onde por definição tem-se

$$\frac{\partial \theta}{\partial T} = \frac{\partial \theta}{\partial s} \cdot \frac{\partial(X - uT)}{\partial T} = -u \frac{\partial \theta}{\partial X}$$

E assim obtém-se

$$\frac{\partial \theta}{\partial T} = -2u\gamma \operatorname{sech}(\gamma s) \quad (2.2.2.12)$$

As equações (2.2.2.11) e (2.2.2.12), mostram que a derivada espacial e temporal de uma solução tipo kink também são pulsos de sólitons localizados. Suas formas são representadas como função de  $s$  na Figura 6.

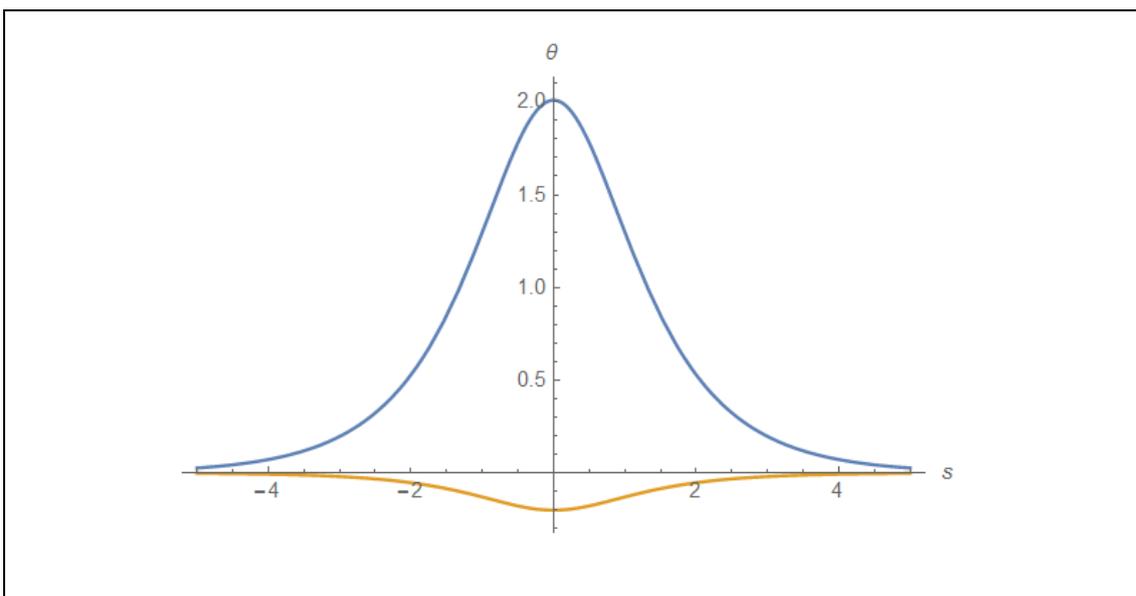


Figura 6. Representação de  $\partial\theta/\partial X$  (linha azul) e  $\partial\theta/\partial T$  (laranja) como uma função de  $s = X - uT$ , para  $u = 0.1$  [Fonte Pessoal].

### 2.2.3 Contração de Lorentz de um sólito tipo kink

A medida que a velocidade do kink se aproxima da unidade ( $u \rightarrow 1$  ou  $-1$ ), na equação (2.2.2.7) sua largura fica mais estreita devido ao fator de contração de Lorentz ( $\sqrt{1-u^2}$ ) no denominador do expoente da mesma; como consequência da forma da própria equação de SG, que é invariante para a transformação de Lorentz de variáveis independentes de  $(X, T)$  para  $(X', T')$ , tem-se que

$$\theta = \theta(s) \quad , \quad s = X - uT$$

Com a seguinte transformação

$$X \rightarrow X' = \gamma(X - uT) \quad (2.2.3.1a)$$

$$T \rightarrow T' = \gamma(T - uX) \quad (2.2.3.1b)$$

De onde obtém-se, respectivamente

$$\frac{\partial X'}{\partial X} = \gamma \quad e \quad \frac{\partial X'}{\partial T} = -u\gamma \quad (2.2.3.2a)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial X} = -u\gamma \quad e \quad \frac{\partial T'}{\partial T} = \gamma \quad (2.2.3.2b)$$

Assim como nos casos anteriores, inicia-se a análise da situação com a expressão abaixo

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial X} dX + \frac{\partial \theta}{\partial T} dT \\ \Rightarrow d\theta &= \left( \frac{\partial \theta}{\partial X'} \frac{\partial X'}{\partial X} + \frac{\partial \theta}{\partial T'} \frac{\partial T'}{\partial X} \right) dX + \left( \frac{\partial \theta}{\partial X'} \frac{\partial X'}{\partial T} + \frac{\partial \theta}{\partial T'} \frac{\partial T'}{\partial T} \right) dT \\ &\Rightarrow d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial X'} \left( \frac{\gamma dX - u\gamma dT}{dx'} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial T'} \left( \frac{-u\gamma dX + \gamma dT}{dT'} \right) \\ &\Rightarrow d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial X'} dX' + \frac{\partial \theta}{\partial T'} dT' \end{aligned}$$

E como consequência da relação (2.2.2.5), chega-se à

$$\frac{\partial}{\partial X} \rightarrow \gamma \frac{\partial}{\partial X'} - u\gamma \frac{\partial}{\partial T'} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial T} \rightarrow -u\gamma \frac{\partial}{\partial X'} + \gamma \frac{\partial}{\partial T'} \quad (2.2.3.3)$$

Aplicando (2.2.3.3) a todos os termos na equação SG (2.2.2.7), conclui-se que

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{\partial^2}{\partial X^2} &= \frac{\partial}{\partial X} \left( \gamma \frac{\partial}{\partial X'} - u\gamma \frac{\partial}{\partial T'} \right) = \gamma \frac{\partial^2}{\partial X \partial X'} - u\gamma \frac{\partial^2}{\partial X \partial T'} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial X^2} = \gamma \frac{\partial}{\partial X'} \left( \frac{\partial}{\partial X} \right) - u\gamma \frac{\partial}{\partial T'} \left( \frac{\partial}{\partial X} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial X^2} = \gamma \frac{\partial}{\partial X'} \left( \gamma \frac{\partial}{\partial X'} - u\gamma \frac{\partial}{\partial T'} \right) - u\gamma \frac{\partial}{\partial T'} \left( \gamma \frac{\partial}{\partial X'} - u\gamma \frac{\partial}{\partial T'} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial X^2} &= \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial X'^2} - 2u\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial X' \partial T'} + u^2 \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial T'^2} \end{aligned} \quad (2.2.3.4a)$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{\partial^2}{\partial T^2} &= \frac{\partial}{\partial T} \left( -\gamma u \frac{\partial}{\partial X'} + \gamma \frac{\partial}{\partial T'} \right) = -u\gamma \frac{\partial^2}{\partial T \partial X'} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial T \partial T'} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial T^2} = -u\gamma \frac{\partial}{\partial X'} \left( \frac{\partial}{\partial T} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial T'} \left( \frac{\partial}{\partial T} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial T^2} = -u\gamma \frac{\partial}{\partial X'} \left( -u\gamma \frac{\partial}{\partial X'} + \gamma \frac{\partial}{\partial T'} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial T'} \left( -u\gamma \frac{\partial}{\partial X'} + \gamma \frac{\partial}{\partial T'} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial T^2} &= u^2 \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial X'^2} - 2u\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial X' \partial T'} + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial T'^2} \end{aligned} \quad (2.2.3.4b)$$

Substituindo-se então, as expressões (2.2.3.4a) e (2.2.3.4b) na equação (2.2.2.7), obtém-se

$$\begin{aligned} &\left( u^2 \gamma^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial X'^2} - 2u\gamma^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial X' \partial T'} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial T'^2} \right) \\ &- \left( \gamma^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial X'^2} - 2u\gamma^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial X' \partial T'} + u^2 \gamma^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial T'^2} \right) + \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u^2\gamma^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial X'^2} - 2u\gamma^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial X'\partial T'} + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial T'^2}$$

$$-\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial X'^2} + 2u\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial X'\partial T'} + -u^2\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial T'^2} + \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow (u^2\gamma^2 - \gamma^2) \frac{\partial^2\theta}{\partial X'^2} + (\gamma^2 - u^2\gamma^2) \frac{\partial^2}{\partial T'^2} + \sin\theta = 0 \quad (2.2.3.5)$$

Observa-se que para que essa equação seja matematicamente idêntica à equação (2.2.2.7) deve-se ter necessariamente

$$u^2\gamma^2 - \gamma^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - u^2},$$

para

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial T'^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial X'^2} + \sin\theta = 0$$

o que só é verdadeiro se, e somente se,

$$\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}},$$

como sugerido na equação (2.2.2.8).

Considerando-se, em seguida,  $s_0 = 0$ ,  $s = X - uT$  e substituindo-se  $X$  e  $T$  por seus valores da relação (2.2.2.2a), na solução da SG, equação (2.2.2.7), tem-se

$$\theta = 4 \tan^{-1} \left[ \exp \left( \frac{\frac{\omega_0}{c_0} x - u\omega_0 t}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \right].$$

Fazendo-se  $v = uc_0$  e utilização a relação (2.2.9b), obtém-se

$$\theta = 4 \tan^{-1} \left[ \exp \left( \frac{\frac{\omega_0}{c_0} x - \frac{v}{c_0} \omega_0 t}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \theta = 4 \tan^{-1} \left[ \exp \left( \frac{x - vt}{d \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \right) \right] \quad (2.2.3.6)$$

Portanto, à medida que a velocidade  $v$  do sóliton, que é sua velocidade linear, se aproximam do valor limite  $c_0$ , o sóliton permanece constante, mas sua largura fica mais estreita devido à contração de Lorentz do seu perfil, dado por  $\left( d \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} \right)$ , e sua “forma de onda” se aproxima de uma função degrau. Em outras palavras, a largura do sóliton decresce quando  $v$  aumenta. É importante destacar que a amplitude do kink é independente de sua velocidade, como observado na Figura 7 [5].

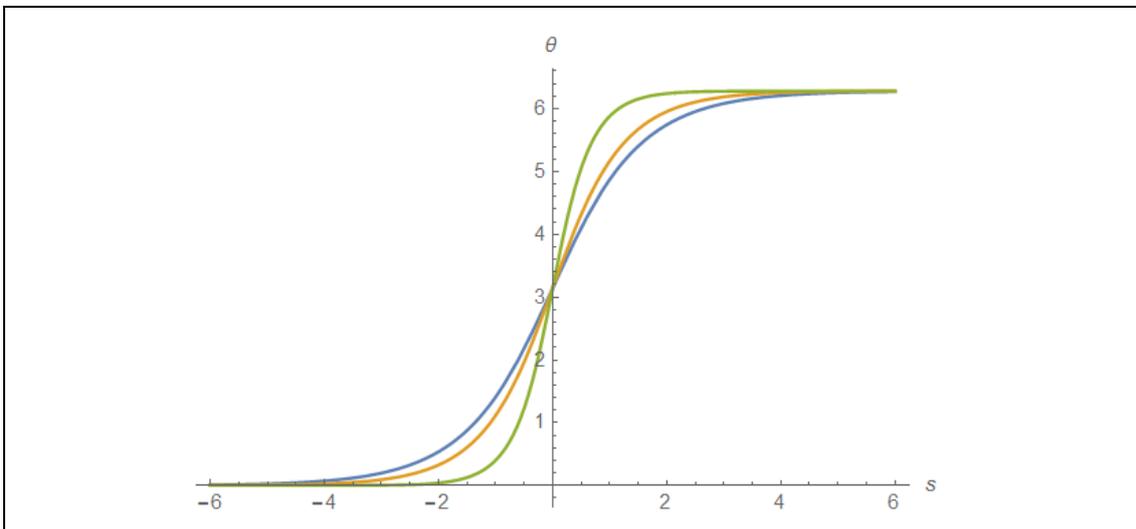


Figura 7. Contração de Lorentz de uma solução kink representada para diferentes valores de  $u = \frac{v}{c_0} = 0$  (azul); 0,6 (laranja); 0,9 (verde) e  $d = 1$  [Fonte Pessoal].

#### 2.2.4 Propriedades Particulares de um Sóliton Kink

A energia total de uma rede de pêndulos conectados por molas está associada a soma da energia cinética de rotação, da energia potencial (elástica) entre pêndulos vizinhos, e da energia potencial gravitacional, através da seguinte relação:

$$E = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{2} I \left( \frac{d\theta_n}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \beta (\theta_{n+1} - \theta_n)^2 + mgL(1 - \cos \theta_n) \right] \quad (2.2.4.1)$$

onde  $I, \theta_n, \beta, g, m$  e  $L$  são, respectivamente, o momento de inércia referente ao movimento do pêndulo, o ângulo de rotação, uma constante relacionada a torção da mola, a aceleração da gravidade, a massa, e o comprimento dos pêndulos, [5].

Na aproximação do limite do contínuo,  $|\partial\theta/\partial x| \approx |(\theta_{n\pm 1} - \theta_n)/a|$ , onde  $a$  é a distância entre os pêndulos; assim, a equação (2.2.4.1) pode ser reescrita na forma integral como

$$E = \frac{I}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} c_0^2 \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \omega_0^2 (1 - \cos\theta) \right] dx \quad (2.2.4.2)$$

onde  $\omega_0^2$  e  $c_0^2$  tem a mesma definição dada pela relação (2.2.13).

Em termos das variáveis  $X = \frac{\omega_0}{c_0} x$  e  $T = \omega_0 t$ , também definidas em (2.2.2a), a equação (2.2.4.2) é escrita na forma

$$E = \frac{I}{a} \omega_0 c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial T} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial X} \right)^2 + (1 - \cos\theta) \right] dX \quad (2.2.4.3)$$

onde o fator  $I\omega_0 c_0$  define a escala de energia, [5].

Dessa forma, a energia  $E_k$  do sóliton kink (ou antikink) pode ser calculada substituindo-se o valor de  $\theta$  da equação (2.2.2.7) na equação (2.2.4.3), que pode ser reescrita de forma simplificada como

$$E = \frac{I}{a} \omega_0 c_0 (E_1 + E_2 + E_3) \quad (2.2.4.4)$$

onde  $E_1, E_2$  e  $E_3$  são os três termos de energia, respectivamente.

O primeiro termo,  $E_1$ , é o termo de energia cinética rotacional:

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial\theta}{\partial T} \right)^2 dX \quad (2.2.4.5)$$

Substituindo a expressão encontrada para a derivada temporal  $(\partial\theta/\partial T)$ , (eq. 2.2.2.12),

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [-2u\gamma \operatorname{sech}(\gamma s)]^2 dX$$

$$\Rightarrow E_1 = 2u^2\gamma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2(\gamma s) dX$$

resolvendo essa integral [5], obtém-se

$$E_1 = 4u^2\gamma \quad (2.2.4.6)$$

O segundo termo,  $E_2$ , é o termo de energia potencial (elástica):

$$E_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 dX \quad (2.2.4.7)$$

Substituindo-se a expressão encontrada para a derivada espacial ( $\partial \theta / \partial X$ ), (eq. 2.2.2.11),

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [2\gamma \text{sech}(\gamma s)]^2 dX \\ \Rightarrow E_2 &= 2\gamma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2(\gamma s) dX \end{aligned}$$

Um método semelhante ao usado para calcular  $E_1$ , fornece

$$E_2 = 4\gamma \quad (2.2.4.8)$$

O terceiro termo,  $E_3$ , é o termo de energia potencial gravitacional:

$$E_3 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos \theta) dX \quad (2.2.4.9)$$

que pode ser escrita como

$$E_3 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) dX \quad (2.2.4.10)$$

Substituindo-se o valor de  $\theta$  dado pela equação (2.2.2.7) na equação (2.2.4.10), e utilizando-se as relações adequadas,

$$E_3 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2(\gamma s) dX$$

Seguindo os resultados anteriores para  $E_1$  e  $E_2$ ,

$$E_3 = \frac{4}{\gamma} \quad (2.2.4.11)$$

Substituindo-se os valores encontrados para  $E_1, E_2$  e  $E_3$  na equação (2.2.4.4), chega-se na seguinte expressão para a energia do sóliton kink (ou antikink):

$$E_k = \frac{I}{a} \omega_0 c_0 \left( 4u^2 \gamma + 4\gamma + \frac{4}{\gamma} \right)$$

$$\Rightarrow E_k = 4 \frac{I}{a} \omega_0 c_0 \gamma \left( u^2 + 1 + \frac{1}{\gamma^2} \right) \quad (2.2.4.12)$$

A partir da relação (2.2.2.8), observa-se que

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - u^2$$

Assim, reescreve-se a equação (2.2.4.12) como

$$E_k = \frac{4}{a} I \omega_0 c_0 \gamma (u^2 + 1 + 1 - u^2)$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{8\gamma}{a} I \omega_0 c_0 \quad (2.2.4.13)$$

que representa a energia total de um kink (ou antikink).

A equação (2.2.4.13) pode ser escrita na forma relativística

$$E_k = \frac{m_0 c_0^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \quad (2.2.4.14)$$

onde a massa do sóliton  $m_0 = \frac{8I\omega_0}{ac_0}$  e  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$ .

Também é possível introduzir o momento relativístico

$$p_k = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \quad (2.2.4.15)$$

Para o repouso ( $v = 0$ ), implica  $p = mv = 0$ , e a energia de repouso do sóliton é

$$E_k = m_0 c_0^2 \quad (2.2.4.16)$$

Observa-se que o sólito kink pode ser considerado como uma partícula relativística de energia  $E_k$ , massa  $m_0$ , e momento  $p_k$ . A natureza corpuscular dos sólitons kinks são observadas no estudo de colisões de sólitons kink-kink e kink-antikink.

As propriedades dos kinks são resumidas a seguir [5]:

- a) Sua amplitude é independente de sua velocidade; ela é constante e permanece a mesma para a velocidade igual a zero: o kink pode ser estático.
- b) Sua largura fica estreita à medida que a velocidade aumenta, devido à contração de Lorentz.
- c) Possuem as propriedades de uma partícula relativística.
- d) O kink que tem um sentido oposto de propagação é chamado de Antikink.

A partir de soluções kink do tipo da equação (2.2.2.7), pode-se esperar que a equação (2.2.2.3) admita mais soluções do tipo

$$\theta = 4 \tan^{-1} \left[ \frac{F(X)}{G(T)} \right] \quad (2.2.4.17)$$

onde F e G são funções arbitrárias, dependentes apenas de X e T respectivamente.

A substituição da equação (2.2.2.7) na equação (2.2.4.17) permite calcular as seguintes soluções [5]:

- Solução kink;
- A colisão kink-kink;
- O sólito breather;
- A colisão kink-antikink.

Procuram-se então, funções que satisfaçam a equação (2.2.4.17) e (2.2.2.7) simultaneamente.

Inicialmente define-se

$$\frac{\theta}{4} = \varphi \quad \Rightarrow \quad \tan \varphi = \frac{F}{G} = y \quad (2.2.4.18)$$

Utilizando-se a equação (2.2.4.18) e fazendo-se algumas manipulações matemáticas chega-se na relação

$$\sin \theta = 4 \tan \varphi \cdot \frac{1 - \tan^2 \varphi}{(\tan^2 \varphi + 1)^2}$$

Dessa forma, a equação (2.2.2.3) pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + y \cdot \frac{(1 - y^2)}{(y^2 + 1)^2} = 0$$

que pode ser fatorada na forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{\partial T} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial X} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{\partial X} \right) + y \cdot \frac{(1 - y^2)}{(y^2 + 1)^2} = 0 \quad (2.2.4.19)$$

Utilizando-se a regra da cadeia e observando que  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}$ , obtém-se

$$\frac{1 + y^2}{y} (y_{XX} - y_{TT}) + 2[(y_T)^2 - (y_X)^2] = (1 - y^2) \quad (2.2.4.20)$$

onde os índices representam derivadas em relação a  $X$  e  $T$ , em que  $(y_X, y_T)$  e  $(y_{XX}$  e  $y_{TT})$ , são derivadas de primeira e segunda ordem respectivamente.

Usando (2.2.4.18) pode-se expressar  $y$  em termos de  $F$  e  $G$

$$y_X = \frac{F_X}{G}, y_{XX} = \frac{F_{XX}}{G}, y_T = -\frac{FG_T}{G^2} \quad e \quad y_{TT} = -\frac{FG_{TT}}{G^2} + \frac{2FG_T^2}{G^3} \quad (2.2.4.21)$$

Substituindo (2.2.4.21) em (2.2.4.20), tem-se

$$(F^2 + G^2) \left( \frac{F_{XX}}{F} + \frac{G_{TT}}{G} \right) - 2[(F_X)^2 - (G_T)^2] + F^2 - G^2 = 0 \quad (2.2.4.22)$$

Derivando (2.2.4.22) em relação a  $X$  e depois em relação a  $T$  e separando as variáveis, obtém-se

$$\frac{1}{(F^2)_X} \left( \frac{F_{XX}}{F} \right)_X = -\frac{1}{(G^2)_T} \left( \frac{G_{TT}}{G} \right)_T = A \quad (2.2.4.23)$$

onde  $A$  é uma constante arbitrária, já que quando tem-se duas expressões que representam derivadas em relação a variáveis diferentes sendo iguais, significa que as duas expressões equivalem a uma (mesma) constante.

Integrando-se a equação (2.2.4.23), em relação às suas diferentes partes, temos respectivamente

$$\int \left( \frac{F_{XX}}{F} \right)_X dX = A \int (F^2)_X dX \Rightarrow F_{XX} = AF^3 + B_1 F \quad (2.2.4.24a)$$

$$\int \left( \frac{G_{TT}}{G} \right)_T dT = -A \int (G^2)_T dT \Rightarrow F_{XX} = -AG^3 + B_2 G \quad (2.2.4.24b)$$

onde  $B_1$  e  $B_2$  são constantes de integração [5].

Multiplicando-se (2.2.4.24a) e (2.2.4.24b) respectivamente por  $2F_X$  e  $2G_T$ , e integrando em relação as suas respectivas variáveis, obtém-se

$$(F_X)^2 = \frac{AF^4}{2} + B_1 F^2 + C_1 \quad (2.2.4.25a)$$

$$(G_X)^2 = -\frac{AG^4}{2} + B_2 G^2 + C_2 \quad (2.2.4.25b)$$

Substituindo-se (2.2.4.25a) e (2.2.4.25b) em (2.2.4.22), e efetuando-se as devidas simplificações temos

$$B_1 - B_2 = 1 \quad e \quad C_1 + C_2 = 0 \quad (2.2.4.26)$$

Por outro lado, definindo-se

$$\frac{A}{2} = -q^2, \quad B_1 = b^2 \quad e \quad C_1 = n^2 \quad (2.2.4.27)$$

Isso permite reescrever as equações (2.2.4.25a) e (2.2.4.25b) como

$$\left( \frac{dF}{dX} \right)^2 = -q^2 F^4 + b^2 F^2 + n^2 \quad (2.2.4.28a)$$

$$\left( \frac{dG}{dT} \right)^2 = q^2 G^4 + (b^2 - 1)G^2 - n^2 \quad (2.2.4.28b)$$

onde  $q, b$  e  $n$  são constantes arbitrárias cujos valores dependerão do tipo de solução kink.

Examina-se agora alguns casos particulares interessantes [5]:

- A solução sólon kink para  $q = 0, b > 0$  e  $n = 0$ ;

- A solução colisão kink-kink para  $q = 0, b^2 > 0$  e  $n \neq 0$ ;
- A solução sóliton breather para  $q \neq 0, b^2 < 1$  e  $n = 0$ ;
- A solução colisão kink-antikink para  $q \neq 0, b > 1$  e  $n = 0$ .

### 2.2.5 Solução Sóliton Kink

Para esse caso  $q = 0, b > 0$  e  $n = 0$ , assim as equações (2.2.4.28a) e (2.2.4.28b) se reduzem a

$$\frac{dF}{F} = \pm b dX \quad e \quad \frac{dG}{G} = (\pm \sqrt{b^2 - 1}) dT$$

Estas equações podem ser integradas para obter-se

$$F = K_1 \exp(\pm bX) \quad e \quad G = K_2 \exp\left[\left(\pm \sqrt{b^2 - 1}\right) T\right] \quad (2.2.5.1)$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  são constantes de integração.

Substituindo-se (2.2.5.1) em (2.2.4.17), tem-se

$$\theta(X, T) = 4 \tan^{-1} \left\{ \frac{K_1}{K_2} \exp \left[ \pm bX \pm \left( \sqrt{b^2 - 1} \right) T \right] \right\}$$

$$\Rightarrow \theta(X, T) = 4 \tan^{-1} \left\{ \frac{K_1}{K_2} \exp \left[ \pm \frac{X \pm \frac{(\sqrt{b^2 - 1}) T}{b}}{b} \right] \right\} \quad (2.2.5.2)$$

Definindo-se então

$$u = \frac{\sqrt{b^2 + 1}}{b} \Rightarrow u^2 = 1 - \frac{1}{b^2} \Rightarrow \frac{1}{b} = \sqrt{1 - u^2} \quad (2.2.5.3)$$

Aplicando-se em (2.2.5.3) obtém-se

$$\theta(X, T) = 4 \tan^{-1} \left\{ \frac{K_1}{K_2} \exp \left[ \pm \frac{X \pm uT}{\sqrt{1 - u^2}} \right] \right\}. \quad (2.2.5.4)$$

Admitindo-se  $\frac{K_1}{K_2} = 1$ , escolhendo-se o sinal adequado, e substituindo-se a relação (2.2.2.8) na equação (2.2.5.4), chegamos na solução sóliton kink (antikink), equação (2.2.2.9):

$$\theta = 4 \tan^{-1} [\exp(\pm \gamma s)].$$

### 2.2.6 Solução Colisão Kink-Kink

Para este caso  $q = 0, b^2 > 1$  e  $n \neq 0$ . Assumindo-se  $n = b$ , as equações (2.2.4.28a) e (2.2.4.28b) se reduzem a

$$\left(\frac{dF}{dX}\right)^2 = b^2 F^2 + b^2 \quad e \quad \left(\frac{dG}{dT}\right)^2 = (b^2 - 1)G^2 - b^2$$

Integrando-se as equações acima em relação a suas variáveis, obtém-se respectivamente

$$F = \sinh(bX) \quad e \quad G = \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1}} \cosh\left[\left(\sqrt{b^2 - 1}\right)T\right] \quad (2.2.6.1)$$

Substituindo-se (2.2.6.1) em (2.2.4.17) e considerando-se a relação (2.2.5.3), chega-se à

$$\theta(X, T) = 4 \tan^{-1} \left[ u \sinh \frac{X}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \operatorname{sech} \frac{uT}{\sqrt{1 - u^2}} \right] \quad (2.2.6.2)$$

Mostrar-se-á agora que a equação (2.2.6.2) descreve a colisão entre dois kinks.

- Para  $X \rightarrow -\infty$ , a equação (2.2.6.2) fornece

$$\theta \rightarrow 4 \tan^{-1} \left[ -\frac{u^{-\gamma X}}{2 \cosh(\gamma u T)} \right].$$

Nesse caso,

$$\theta \rightarrow \theta_{K_1} = 4 \tan^{-1} \left[ -u e^{-\gamma(X-uT)} \right] \quad \text{para } T \rightarrow -\infty \quad (2.2.6.3a)$$

$$\theta \rightarrow \theta_{K_2} = 4 \tan^{-1} \left[ -u e^{-\gamma(X+uT)} \right] \quad \text{para } T \rightarrow +\infty \quad (2.2.6.3b)$$

Usando-se a relação

$$\tan^{-1} y = -\tan^{-1} \left( \frac{1}{y} \right) + \frac{\pi}{2} \quad e \quad -\tan^{-1} \left( \frac{1}{y} \right) = \tan^{-1} \left( -\frac{1}{y} \right)$$

Pode-se transformar (2.2.6.3a) e (2.2.6.3b), respectivamente, em

$$\theta_{K_1} = 4 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{u} e^{\gamma(X-uT)} \right] + 2\pi \quad \text{para } T \rightarrow -\infty \quad (2.2.6.4a)$$

$$\theta_{K_1} = 4 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{u} e^{\gamma(X+uT)} \right] + 2\pi \quad \text{para } T \rightarrow +\infty \quad (2.2.6.4b)$$

- Para  $X \rightarrow +\infty$ , a equação (2.2.6.2) fornece

$$\theta \rightarrow 4 \tan^{-1} \left[ \frac{u^{\gamma X}}{2 \cosh(\gamma u T)} \right].$$

Utilizando-se um raciocínio similar ao utilizado para  $X \rightarrow -\infty$ , obtém-se

$$\theta_{K_1} = 4 \tan^{-1} [u e^{\gamma(X+uT)}] + 2\pi \quad \text{para } T \rightarrow -\infty \quad (2.2.6.5a)$$

$$\theta_{K_1} = 4 \tan^{-1} [u e^{\gamma(X-uT)}] + 2\pi \quad \text{para } T \rightarrow +\infty \quad (2.2.6.5b)$$

Observa-se, então, que as relações (2.2.6.4) e (2.2.6.5) representam um kink  $K_1$  e um kink  $K_2$  se aproximando da origem de  $T \rightarrow -\infty$  com velocidade  $-u$  e  $+u$  respectivamente, e se afastando desse ponto com velocidade  $+u$  e  $-u$  respectivamente, para  $T \rightarrow +\infty$ , como representado na Figura 8.

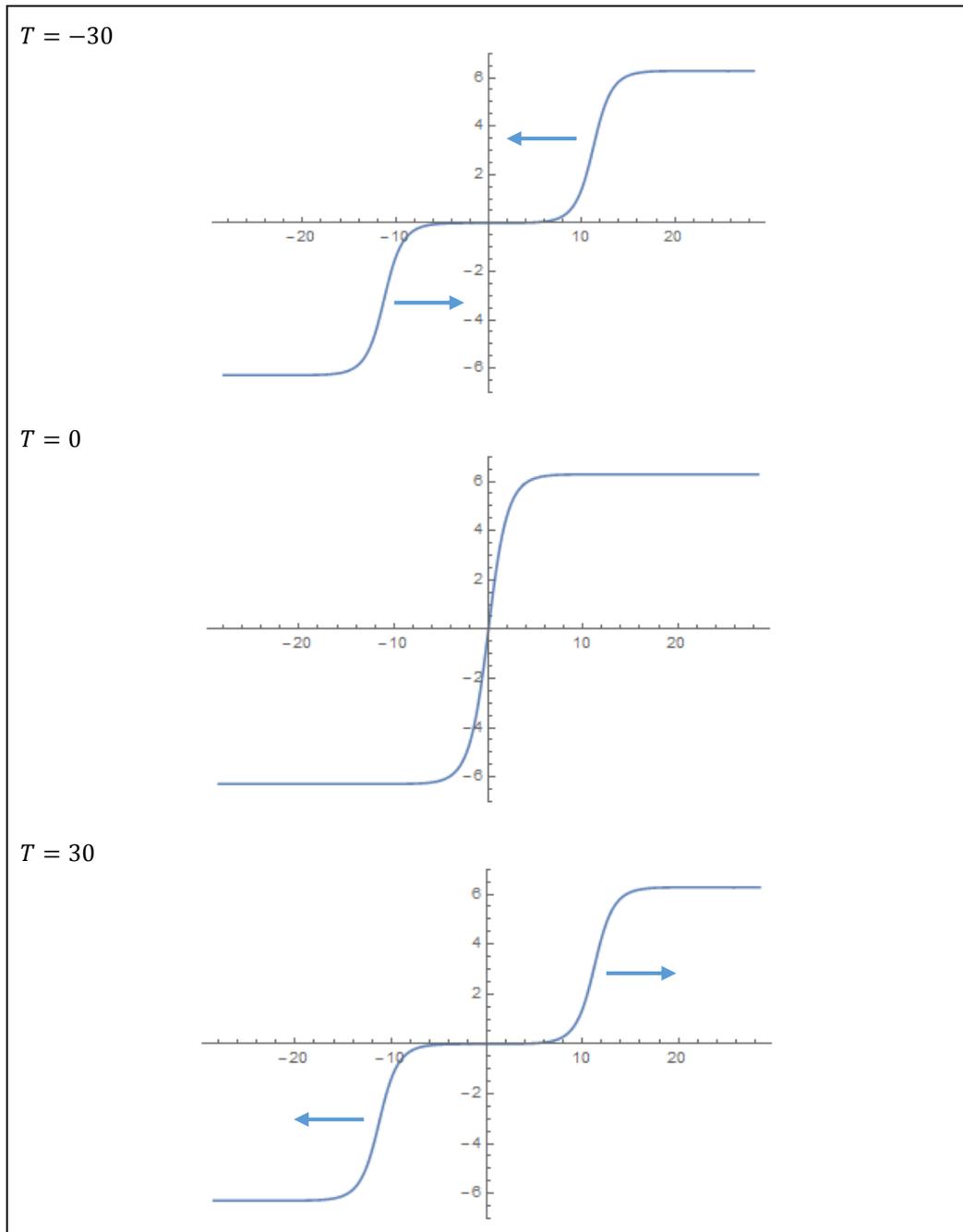


Figura 8. Representação de uma colisão kink: de  $T = -30$  os dois kinks se propagam com velocidades opostas  $u = +0.4$ , e  $u = -0.4$ ; em  $T = 0$  eles colidem na origem O; em  $T = +30$  eles movem se afastando da origem com velocidade  $u = -0.4$ , e  $u = +0.4$  [Fonte Pessoal].

### 2.2.7 Solução Breather

Para este caso  $q = 0$ ,  $b^2 > 1$  e  $n \neq 0$ , assim, substituindo os valores de  $q$ ,  $b^2$  e  $n$ , as equações (2.2.4.28a) e (2.2.4.28b) se reduzem a

$$\left(\frac{dF}{dX}\right)^2 = -q^2 F^4 + b^2 F^2 \quad e \quad \left(\frac{dG}{dT}\right)^2 = q^2 G^4 + (b^2 - 1)G^2 \quad (2.2.7.1)$$

Simplificando a equação (2.2.7.1) e substituindo as relações definidas abaixo

$$b'^2 = \frac{b^2}{q^2} \quad e \quad b'' = \frac{\sqrt{1-b^2}}{q} \quad (2.2.7.2)$$

Obtém-se

$$\frac{dF}{F\sqrt{b'^2 - F^2}} = \pm q dX \quad e \quad \frac{dG}{G\sqrt{G^2 - b''^2}} = \pm q dT$$

Integrando-se as equações acima em relação a suas variáveis, chega-se respectivamente à

$$F = b' \operatorname{sech}(b'qX) \quad e \quad G = \pm \frac{b''}{\sin(b''qT)} \quad (2.2.7.3)$$

Substituindo (2.2.7.3) em (2.2.4.17), tem-se

$$\theta_B = 4 \tan^{-1} \left[ \pm b' \operatorname{sech}(b'qX) \cdot \frac{\sin(b''qT)}{b''} \right] \quad (2.2.7.4)$$

Utilizando novamente a relação (2.2.7.2), mas agora de forma inversa na equação (2.2.7.4), pode-se escrever

$$\theta_B = 4 \tan^{-1} \left[ \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} \operatorname{sech}(bX) \cdot \sin(\sqrt{1-b^2}T) \right], \quad b^2 < 1 \quad (2.2.7.5)$$

Definindo-se ainda

$$\Omega = \sqrt{1-b^2} = i\sqrt{b^2-1} \quad e \quad b = \sqrt{(1-\Omega^2)} \quad (2.2.7.6)$$

Substituindo (2.2.7.6) em (2.2.7.5), tem-se

$$\theta_B = 4 \tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{1-\Omega^2}}{\Omega} \operatorname{sech}(\sqrt{1-\Omega^2}X) \cdot \sin(\Omega T) \right] \quad (2.2.7.7)$$

A equação (2.2.7.7) é conhecida como sóliton Breather, e está representado na Figura 9.

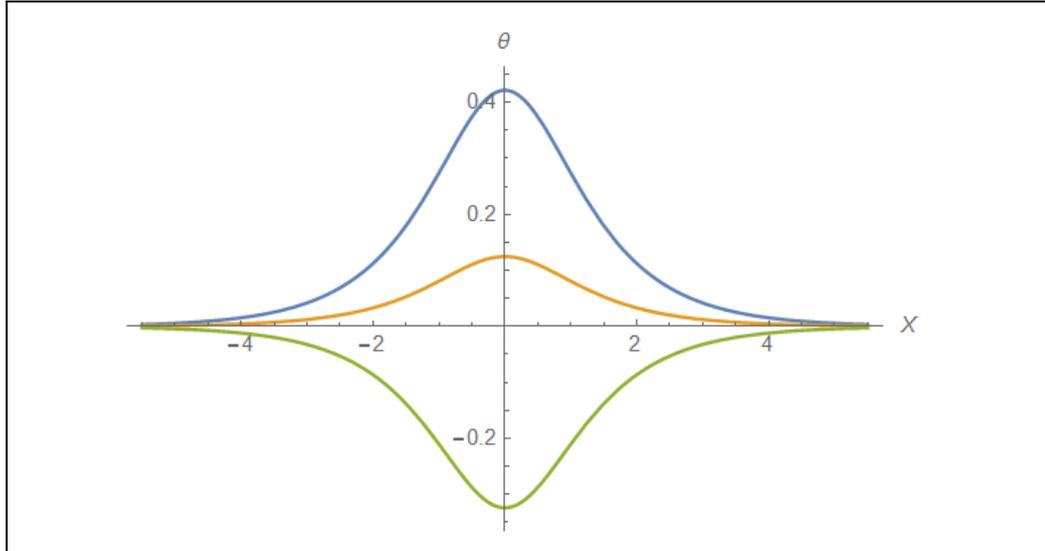


Figura 9. Representação de oscilações breather, como dado pela equação (2.2.7.7), para diferentes tempos  $T = 6$  (azul),  $6.2$  (laranja) e  $6.5$  (verde) [Fonte Pessoal].

### 2.2.8 Solução Colisão kink-antikink

Para este caso  $q \neq 0$ ,  $b > 1$  e  $n = 0$ , dessa forma, substituindo os valores de  $q$ ,  $b^2$  e  $n$ , as equações (2.2.4.28a) e (2.2.4.28b) se reduzem a uma equação similar a equação do breather (2.2.7.5), exceto pelo fato de, nesse caso,  $b^2 > 1$ . Dessa forma

$$\theta(X, T) = 4 \tan^{-1} \left[ \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} \operatorname{sech}(bX) \cdot \sin(\sqrt{1-b^2}T) \right], b^2 > 1 \quad (2.2.8.1)$$

Pode-se reescrever a equação (2.2.8.1) da seguinte forma

$$\theta(X, T) = 4 \tan^{-1} \left[ \frac{b}{i\sqrt{b^2-1}} \operatorname{sech}(bX) \cdot \sin(i\sqrt{b^2-1}T) \right], b^2 > 1 \quad (2.2.8.2)$$

Definindo-se

$$u = \frac{\sqrt{b^2-1}}{b}$$

e utilizando a relação (2.2.2.8), escreve-se a equação (2.2.8.2), como

$$\theta(X, T) = 4 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{u} \operatorname{sech}(\gamma X) \cdot \sin(\gamma u T) \right] \quad (2.2.8.3)$$

A fim de facilitar a análise da equação (2.2.8.3), escrevesse-a da seguinte forma

$$\theta(X, T) = 4 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{u} \cdot \frac{e^{\gamma u T} - e^{-\gamma u T}}{e^{\gamma X} + e^{-\gamma X}} \right] \quad (2.2.8.4)$$

Mostrar-se-á agora que essa equação descreve a colisão kink-antikink.

- Para  $T \rightarrow -\infty$ , a equação (2.2.8.4) fornece

$$\theta \rightarrow 4 \tan^{-1} \left[ -\frac{1}{u} \cdot \frac{e^{-\gamma u T}}{e^{\gamma X} + e^{-\gamma X}} \right]$$

Nesse caso,

$$\theta \rightarrow \theta_K = -4 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{u} e^{\gamma(X-uT)} \right] \quad \text{para } X \rightarrow -\infty \quad (2.2.8.5a)$$

$$\theta \rightarrow \theta_{-K} = -4 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{u} e^{-\gamma(X+uT)} \right] \quad \text{para } X \rightarrow +\infty \quad (2.2.8.5b)$$

- Para  $T \rightarrow +\infty$ , a equação (2.2.8.4) fornece

$$\theta \rightarrow 4 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{u} \cdot \frac{e^{\gamma u T}}{e^{\gamma X} + e^{-\gamma X}} \right]$$

De onde obtém-se,

$$\theta \rightarrow \theta_{-K} = 4 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{u} e^{\gamma(X+uT)} \right] \quad \text{para } X \rightarrow -\infty \quad (2.2.8.6a)$$

$$\theta \rightarrow \theta_K = 4 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{u} e^{-\gamma(X-uT)} \right] \quad \text{para } X \rightarrow +\infty \quad (2.2.8.6b)$$

Observa-se que para  $T \rightarrow -\infty$ , a equação (2.2.8.5a) descreve um kink se aproximando da origem com velocidade  $u$  de  $X \rightarrow -\infty$ , e a equação (2.2.8.5b) representa um antikink se aproximando da origem com velocidade  $-u$  de  $X \rightarrow +\infty$ . Estas colidem e atravessam uma a outra, então para  $T \rightarrow +\infty$  o kink está em  $X \rightarrow +\infty$  e o antikink está em  $X \rightarrow -\infty$ , como descritas pelas equações (2.2.8.6a) e (2.2.8.6b), e representadas pela Figura 10.

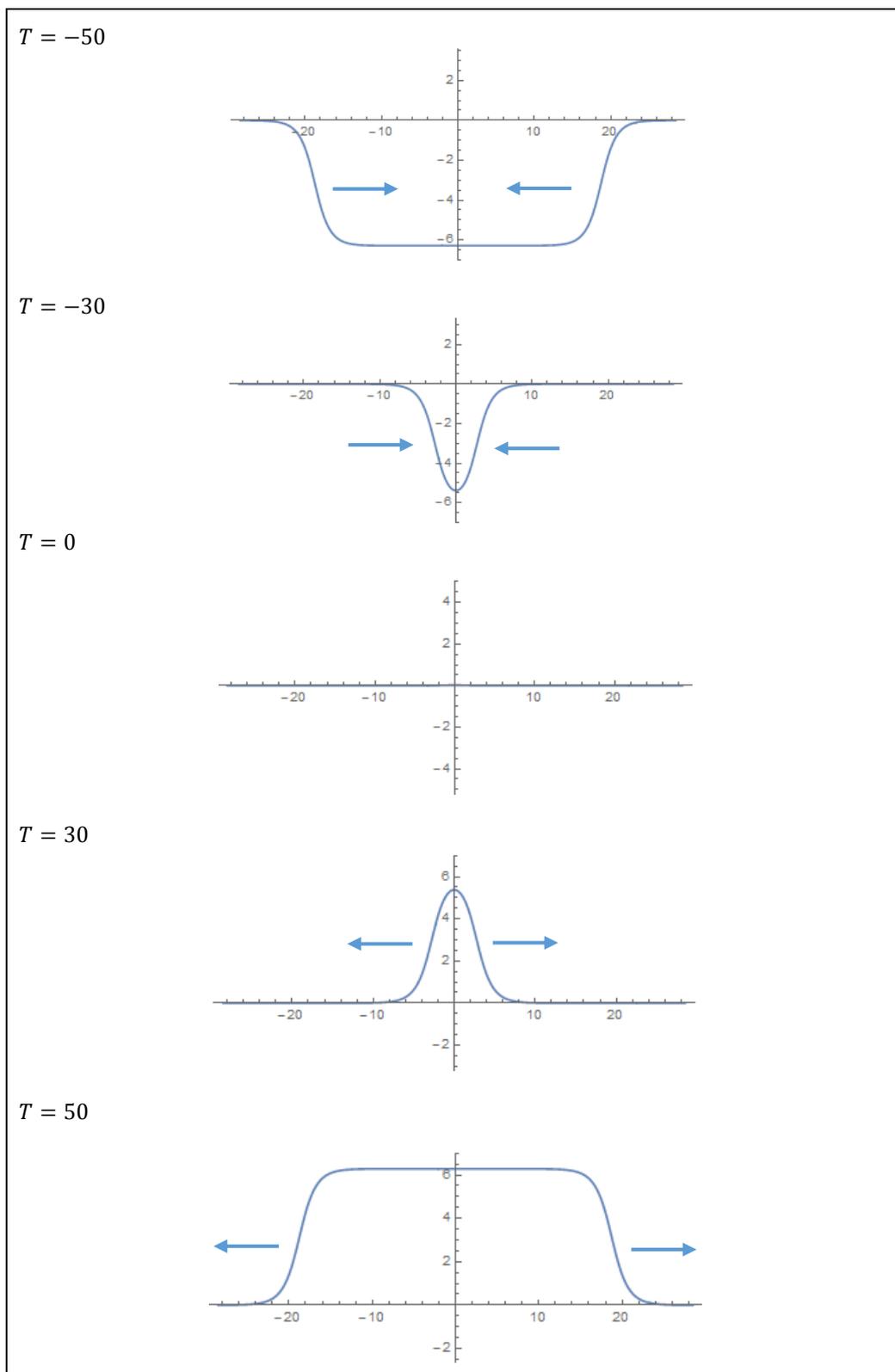


Figura 10. Representação de uma colisão kink-antikink: em  $T = -50$  o kink e o antikink se movem com velocidades opostas  $u = +0.2$ , e  $u = -0.2$ ; a forma da onda que corresponde a colisão está representada em  $T = 0$ ; em  $T = +50$  eles movem se afastando da origem com as respectivas velocidades  $u = -0.2$ , e  $u = +0.2$  [Fonte pessoal].

### 3 CONCLUSÃO

Com base nesse projeto observa-se que uma grande classe de fenômenos não lineares e dispersivos pode ser ilustrada através de um sistema relativamente simples de pêndulos acoplados por molas. Pode-se descrever com grande precisão a propagação de sólitons utilizando-se a equação de Sine-Gordon, bem como calcular a energia associada a esse movimento nos mais diversos ramos da Física.

Por outro lado, a análise de colisões entre sólitons revela o caráter corpuscular dessas ondas, onde as próprias soluções da equação de Sine-Gordon mostram que elas podem se cruzar sem se deformarem, de modo que também são bastante apropriadas para descrever colisões entre partículas elementares.

Assim, a SG pode ser usada para descrever diversos outros fenômenos físicos, como por exemplo, a representação da dinâmica que descreve a propagação de uma torção ao longo da cadeia de DNA; a propagação de fluxons em junções Josephson, que é uma junção entre dois supercondutores; e o deslocamento de defeitos cristalográficos. Essas ondas também dispensam os amplificadores de luz nas fibras ópticas, hoje utilizados, tendo o potencial para baratear o custo, além de manterem suas características mesmo quando viajando lentamente, o que também abre caminho para uma série de novas pesquisas, explorando a facilidade de se dirigir uma onda no interior de dispositivos muito pequenos como os chips.

#### 4 REFERÊNCIAS

[1] H. Moisés Nussenzveig, Curso de Física Básica, vol. 2, Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor. Ed. Edgard Blücher, 3ª ed, 2002.

[2] P.G. Drazin and R.S. Johnson, Solitons: an introduction, Cambridge University Press, 1996.

[3] Russel L. Herman, UNCW's Discovery Magazine, 3 (1992) "Catching the Wave".

[4] T. Dauxois and M. Peyrard, Physics of solitons, Cambridge University Press, 2006.

[5] M. Remoissent, Waves called solitons, Springer, 1999.

[6] JUNIOR, Jarbas Lopes Cardoso. Sólitos. Revista Brasileira de Física, Vol. 10, nº 3, 1980. Instituto de Física, Unicamp-SP.

[7] Multiple self-localized electronic states in trans-polyacetylene Xi Lin, Ju Li, Clemens j. Först, Sidney Yip Proceedings of the National Academy of Sciences June 13, 2006. Vol. 103, nº 24.