

**DETECÇÃO DE SÓLITONS NUMA
REDE ELÉTRICA NÃO-LINEAR DISPERSIVA**

Ricardo Ribeiro

Tecnologia de Materiais

São Paulo

2014

Pça. Cel. Fernando Prestes, 30 - Bom Retiro - São Paulo-SP - CEP 01124-060

Telefone: (11) 3322-2200 Site: www.fatecsp.br

**DETECÇÃO DE SÓLITONS NUMA
REDE ELÉTRICA NÃO-LINEAR DISPERSIVA**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Tecnologia de São Paulo, como um dos pré-requisitos para a obtenção do título de Tecnólogo em Tecnologia de Materiais, sob a orientação da Profa. Dr. Regina Maria Ricotta.

São Paulo

2014

RESUMO

Neste trabalho apresentaremos uma breve introdução à teoria dos sólitons com ênfase na propagação de sólitons através de uma linha de transmissão elétrica não-linear dispersiva. Analisamos os efeitos da Não-linearidade e da dispersão, inicialmente separados e depois combinados, através do estudo de vários tipos de rede de transmissão: primeiro estudamos uma linha de transmissão linear ideal na qual não observamos nenhum dos dois efeitos; depois estudamos uma linha de transmissão linear e dispersiva, nela veremos que a dispersão fará com que a onda se espalhe e tenha sua amplitude reduzida, até que, não exista mais uma onda. Ao contrário numa linha de transmissão não-linear e não dispersiva veremos que a não-linearidade fará com que a amplitude da onda aumente e se incline até que a onda se “quebre” como uma onda do mar; e por último uma linha de transmissão não-linear dispersiva na qual os efeitos da não-linearidade e da dispersão se opõem e se equilibram quando são da mesma ordem, assim a onda se propaga com perfil constante; é a onda solitônica.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: O procedimento usado por Russell para gerar onda solitária (visão transversal de um tanque) no primeiro acumula-se uma massa de água, em seguida libera-se essa massa rapidamente, formando uma onda.

FIGURA 2: Pulso observado em tempos diferentes por dois referenciais $O(x, t)$ e $O'(x', t)$.

FIGURA 3: Superposição construtiva.

FIGURA 4: Superposição destrutiva.

FIGURA 5: Esquema de um trem de ondas.

FIGURA 6(a): Linha de Transmissão contínua aterrada e sem perdas.

(b): Circuito elétrico equivalente

FIGURA 7: Frequência ω versus vetor de onda k para uma onda não dispersiva.

FIGURA 8: Propagação sem deformação de um pulso de onda numa linha de transmissão linear não dispersiva.

FIGURA 9: Circuito equivalente de uma rede elétrica.

FIGURA 10: Diagrama representando a relação de dispersão das ondas dispersivas em uma linha de transmissão LC. A linha reta representa o caso não dispersivo.

FIGURA 11: Função envelope gaussiana num certo tempo inicial e sua volta-gem correspondente.

FIGURA 12: Os pontos de grande amplitude ultrapassam os pontos de pequena amplitude num pulso de onda não-linear.

FIGURA 13: Representação da solução da onda solitária $V(x, t)$ dada por 5.16 e viajando a uma velocidade v .

FIGURA 14: Linha de transmissão.

FIGURA 15: Esquema completo para obtenção de sólitons elétricos.

FIGURA 16: Forma do sóliton na célula 100.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO A descoberta das ondas solitarias	7
CAPÍTULO 2 – ONDAS	9
2.1 – Ondas progressivas	10
2.2 – Ondas harmônicas	11
2.3 – Equação de ondas unidimensionais	12
2.4 – O principio da superposição	12
2.5 – Intensidade de uma onda	14
2.6 – Interferência de onda	14
2.7 – Batimentos; Velocidade de grupo	15
CAPÍTULO 3 – A EQUAÇÃO DE KORTEWEG-DE VRIES (KDV)	16
CAPÍTULO 4 – REDE ELÉTRICA	19
4.1 - Linha de transmissão linear sem dispersão	19
4.2 - Linha de transmissão linear dispersiva	23
4.2.1 - Linha de transmissão linear discreta	23
4.2.2 - Limite de dispersão fraca	25
4.3 - A evolução do pacote de onda	27
4.4 - Abertura do pacote de onda por dispersão induzida	29

CAPÍTULO 5 – SOLITONS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO NÃO-LINEARES	32
5.1 - Não-linearidade na rede elétrica	33
5.2 - Efeitos combinados de dispersão e não-linearidade	36
5.3 - Ondas elétricas solitárias e pulso solitônicos	38
 CAPÍTULO 6 – VERSÃO MINIATURIZADA DE UMA REDE ELÉTRICA PARA EXPERIMENTOS COM PROPAGAÇÃO SOLITÔNICA	 42
CONCLUSÃO	44
BIBLIOGRAFIA	46

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A descoberta da onda solitária

Em 1834 John Scott Russell observando um barco sendo puxado por dois cavalos no canal de Edinburgh para Glasgow, verificou que quando o mesmo foi subitamente freado, surgiu uma grande onda solitária com uma forma arredondada bem definida. Seguindo a onda formada, ele observou que a mesma continuava seu curso ao longo do canal sem mudar a sua forma e sem diminuir sua velocidade por um longo trecho. Depois desta observação, Russell realizou várias experiências em laboratório, gerando suas ondas solitárias de translação ao mergulhar pesos em uma extremidade de canais de água. Ele foi capaz de verificar empiricamente que a velocidade v da onda era dada por [1].

$$V^2 = g(h+a) \quad 1.0$$

onde **a** era a amplitude da onda, **h** a profundidade do canal não-perturbado e **g** a aceleração da gravidade. Da expressão obtida por Russell, observa-se imediatamente que quanto maior for a amplitude da onda maior será a sua velocidade de translação. Posteriormente, J. Boussinesq em 1871, Lord Rayleigh em 1876 e D. J. Korteweg e G. de Vries em 1895, considerando uma onda propagando-se num canal com seção transversal retangular, cujo meio era um fluido incompressível e sem viscosidade, e supondo que o comprimento da onda era muito maior que a profundidade do canal, obtiveram teoricamente a fórmula de Russell para a velocidade da onda solitária de translação, Figura 1

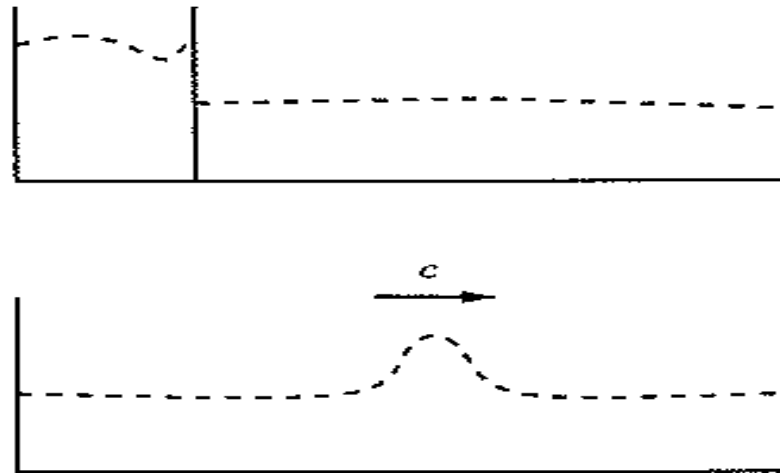


Figura 1: O procedimento usado por Russell para gerar onda solitária (visão transversal de um tanque) no primeiro acumula-se uma massa de água, em seguida libera-se essa massa rapidamente, formando uma onda.

Outro fato observado por Russell em 1844, que permaneceu sem explicação por mais de um século, é que, em colisões, ondas solitárias retêm suas características. Em uma de suas experiências, Russell criou duas ondas solitárias com velocidades diferentes e observou que a onda mais veloz alcançava, interagia e ultrapassava a onda mais lenta, de modo que após o processo, ambas permaneciam intactas e não distorcidas, exatamente como se ambas satisfizessem o princípio de superposição linear. Por outro lado, sabia-se que efeitos não-lineares estavam em jogo; de fato, durante a interação, as ondas sofriam um deslocamento de fase, ou seja, as ondas, depois da interação, não estavam na posição que deveriam estar se ambas se movessem com velocidade constante (veja Figura 4). E isso sugere que as ondas solitárias observadas por Russell seriam sólitons e que, tomando-se o limite do contínuo em seus cálculos, os sólitons em colisões, rapidamente restabeleceriam suas formas iniciais, o que explicaria o fenômeno observado por Russell.

Do ponto de vista matemático, sólitons são soluções de equações (ou de um sistema de equações) diferenciais não-lineares integráveis. A equação de Kortweg-de-Vries (KdV) pertence a esta classe de equações integráveis. Do ponto de vista prático, sólitons podem representar fenômenos que apresentam as características de serem não-lineares, localizados, quase-estáticos e interagirem fortemente mantendo sua identidade.

No capítulo 2 apresentamos as principais características e os principais aspectos relacionados às ondas tais como: ondas progressivas, ondas harmônicas, equação da onda unidimensional, superposição, intensidade, interferência e velocidade de grupo.

No capítulo 3 analisamos separadamente o tipo mais elementar de equação da onda que apresenta dispersão e o tipo mais elementar de equação da onda que apresenta somente não-linearidade. Apresentamos também a equação de Kortweg-de-Vries (KdV) e mostramos que ela é o tipo mais elementar de equação da onda que agrega o termo de dispersão e o termo de não-linearidade.

No capítulo 4 veremos como se dá a propagação de uma onda em uma rede elétrica linear. Em seguida veremos como surgem os efeitos de dispersão numa rede elétrica linear, e como se dá a propagação das ondas que viajam por esta rede elétrica linear e dispersiva.

No capítulo 5 analisamos a propagação em redes elétricas não-lineares. Em seguida vemos como os efeitos dispersivos (que faz com que a onda vá se abrindo até se extinguir) e não-lineares (faz com que a onda forme uma crista até se “quebrar”) interagem e se balanceiam, com isso a onda se torna um pulso solitônico com perfil e velocidades constantes ao qual chamamos de Sóliton.

CAPÍTULO 2

ONDAS

Partimos do conceito de onda. Onda é qualquer perturbação que se transmite de um meio a outro sem que haja transporte direto de matéria, ou seja, uma onda carrega uma informação sem precisar transportar massa.

Existem vários tipos de onda, vamos discutir um pouco mais sobre alguns desses tipos e sobre as principais características das ondas.

2.1 – Ondas Progressivas

Considere um pulso numa corda que viaja com uma velocidade definida, como no esquema abaixo, sendo observado nos referenciais $O(x,t)$, dado por um observador parado e fora da onda, e $O'(x',t)$, que viaja junto com a onda, com a mesma velocidade. No instante $t=0$ o perfil da onda observado nos dois referenciais é o mesmo, Figura 2(a). Esse tipo de onda é governado pela equação $y(x,t) = f(x')$, ou seja, essa equação nos diz que o perfil da onda dado por y , função das duas variáveis x e t no referencial $O(x,t)$, só depende dessas variáveis através de $x' = x - vt$, podendo ser uma função qualquer de x' . Para qualquer t visto pelo referencial $O'(x',t)$ o perfil da onda permanece o mesmo; x' é constante em qualquer tempo, Figura 2(b).

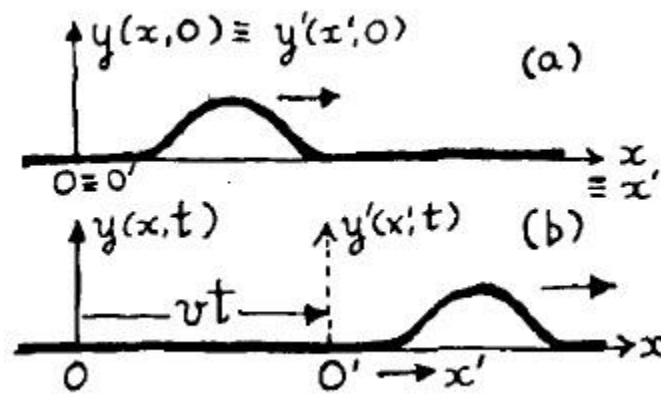


Figura 2: Pulso observado em tempos diferentes por dois referenciais $O(x,t)$ e $O'(x',t)$.

$$y'(x',t) = y(x',0) = f(x'), \quad y'(x',0) = y(x,0)$$

A relação entre os dois referenciais é dada por uma transformação de Galileu

$$x' = x - vt$$

de modo que no referencial original

$$y(x,t) = f'(x',t) = f(x - vt)$$

2.2 – Ondas harmônicas

Elas são assim chamadas, porque a perturbação num dado ponto x corresponde a uma oscilação harmônica simples. Esse tipo de onda é uma solução cossenoidal da equação da onda, do tipo $f(x') = A \cos(kx' + \delta)$. Como esse tipo de onda também é uma onda progressiva, temos:

$$y(x, t) = A \cos[k(x - vt) + \delta]$$

e como a perturbação num ponto x é um movimento harmônico simples (MHS), que possui uma frequência angular de oscilação que é

$$\omega = kv = 2\pi\nu = 2\pi/\tau \quad 2.0$$

onde ν é a frequência e τ é o período temporal.

Vemos que $y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \delta)$.

Como uma função de x , vemos que o perfil da onda é senoidal, ou seja, periódico, com período espacial:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad 2.1$$

λ se chama comprimento de onda e representa, por exemplo, a distância entre duas cristas consecutivas.

Substituindo 2.1 em 2.0, obtemos:

$$\lambda = v\tau \quad 2.2$$

o que exprime o fato de que a onda se desloca de $\Delta x = \lambda$ durante um período $\Delta t = \tau$.

Da mesma forma que a frequência $\nu = 1/\tau$ dá o número de oscilações por unidade de tempo, $k = 1/\lambda$ dá o número de comprimentos de onda por unidade de comprimento, e chama-se *número de onda*.

2.3 – Equação de ondas unidimensionais

Para que possamos associar uma equação de movimento com a propagação da onda temos que calcular a aceleração e a velocidade num dado ponto x . Isso será possível se fixarmos x e derivarmos em relação ao tempo a expressão geral de uma onda progressiva que se propaga para a direita $y(x,t) = f(x')$, $x' = x - vt$. Temos:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad 2.2$$

2.4 – O princípio da superposição

O princípio da superposição ocorre quando duas ou mais ondas se encontram, gerando uma onda resultante igual à soma algébrica das perturbações de cada onda.

Quando duas ou mais ondas se propagam, simultaneamente, num mesmo meio, diz-se que há uma superposição de ondas.

Como exemplo, considere duas ondas propagando-se conforme indicam as figuras:

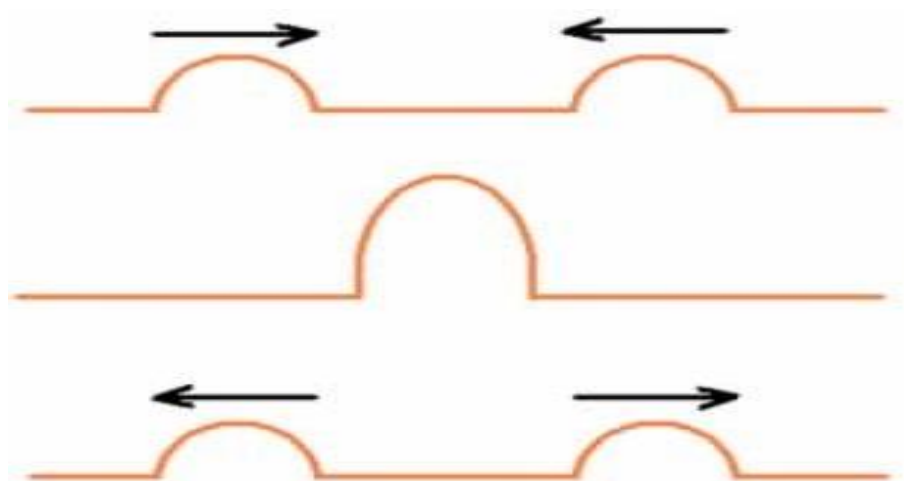


Figura 3. Superposição construtiva.

Supondo que atinjam o ponto P no mesmo instante, elas causarão nesse ponto uma perturbação que é igual à soma das perturbações que cada onda causaria se o tivesse atingido individualmente, ou seja, a onda resultante é igual à soma algébrica das ondas que cada uma produziria individualmente no ponto P, no instante considerado.

Após a superposição, as ondas continuam a se propagar com as mesmas características que tinham antes.

Quando os efeitos são subtraídos, eles podem se anular no caso de duas propagações com deslocamento invertido.

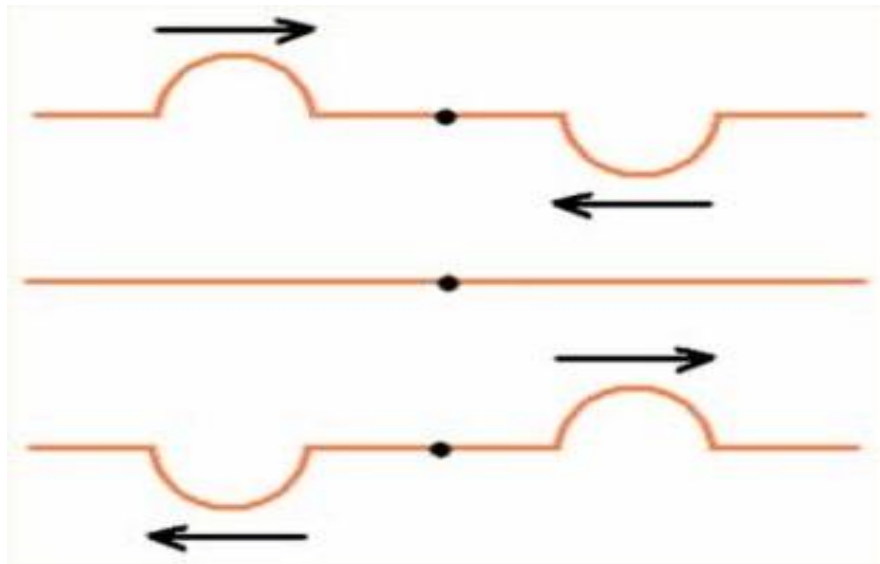


Figura 4. Superposição destrutiva.

Quando ocorre o encontro de duas cristas, ambas levantam o meio naquele ponto; por isso ele sobe muito mais.

Quando dois vales se encontram, eles tendem em abaixar o meio naquele ponto.

Quando ocorre o encontro entre um vale e uma crista, um deles quer puxar o ponto para baixo e o outro quer puxá-lo para cima. Se a amplitude das duas ondas for à mesma, não ocorrerá deslocamento, pois eles se cancelam (amplitude zero) e o meio não sobe e nem desce naquele ponto.

2.5 – Intensidade de uma onda

Considere uma onda progressiva propagando-se numa corda.

Como já foi dito anteriormente uma onda progressiva transporta energia. Para gerar a onda harmônica progressiva, é preciso realizar trabalho. A energia gerada é transmitida à corda e se propaga com a onda.

Num dado instante t , a porção da corda à esquerda de x atua sobre um elemento da corda no ponto x com uma força transversal. O trabalho realizado corresponde à energia transmitida através de x . Em geral não interessa o valor instantâneo, e sim a média sobre um período, que é o que chamamos de intensidade I da onda.

Dessa forma pode ser mostrado que a intensidade da onda é proporcional ao quadrado da amplitude, à velocidade da onda e ao quadrado da frequência, da seguinte forma:

$$I = \frac{\mu \cdot v \cdot \omega^2 \cdot A^2}{2} \quad 2.3$$

Onde μ é a densidade linear de massa da corda, [4].

2.6 – Interferência de onda

A interferência pode ser construtiva ou destrutiva, para isso vamos considerar dois pulsos que se deslocam numa corda em direções opostas. Quando os dois pulsos se encontram ocorre a interferência; se os pulsos estão do mesmo lado da corda, ou seja, estão em fase ocorre uma interferência construtiva e as amplitudes dos pulsos serão somadas. Agora se os pulsos estão de lados diferentes da corda, ou seja, estão defasados ocorre a interferência destrutiva e as amplitudes dos pulsos serão subtraídas. Como se observa nas figuras 3 e 4.

Fenomenologicamente, as interferências podem ser classificadas em interferências unidimensionais (caso da corda com pulsos se movimentando em sentidos opostos), bidimensionais quando uma fina camada de óleo ou sa-

bão se espalha sobre uma superfície irregular, quando um feixe luminoso policromático incide na película sofre uma reflexão tanto na superfície superior quanto na superfície inferior da camada de óleo ou sabão. Como resultado, surgem regiões escuras nas zonas referentes às interferências destrutivas e regiões claras quando ocorre interferência construtiva. E tridimensionais, que ocorrem quando feixes de cores diferentes se cruzam, verificando uma mudança de cor somente na região do cruzamento dos feixes, voltando às cores originais após saírem daquela região.

2.7 – Batimentos; Velocidade de grupo

É um fenômeno que acontece quando existe uma superposição entre duas fontes emissoras de ondas que produzam ondas que possuam a mesma direção, amplitude e frequências próximas. Pelo fato das frequências serem diferentes uma da outra, haverá momentos de interferência construtiva, onde a amplitude resultante será grande e momentos de interferência destrutiva, acarretando numa amplitude pequena.

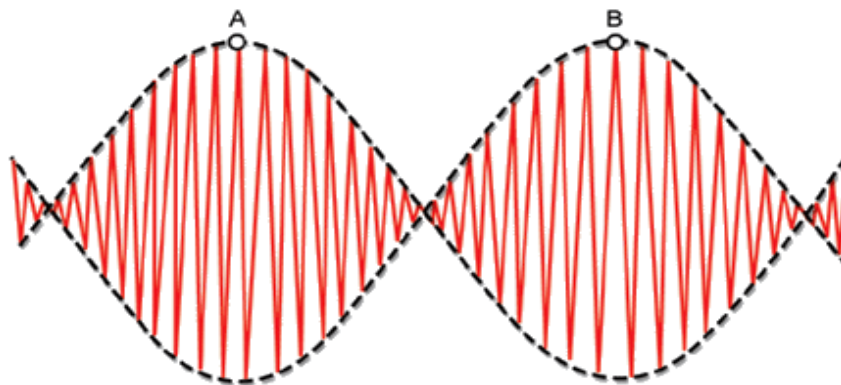


Figura 5. Esquema de um trem de ondas.

O movimento de um grupo de ondas pode ser considerado como um trem de ondas senoidal (linha cheia) com frequência central e número de ondas, enquanto a envoltória (linha pontilhada) se encontra variando lentamente no espaço e no tempo. A velocidade da envoltória, ou seja, no ponto A ou B

chama-se velocidade de grupo. As variações periódicas no espaço da envoltória, formam muitos pacotes de ondas. Velocidade de grupo é simplesmente a velocidade destes pacotes de ondas. A velocidade de grupo possui um significado físico; é a velocidade de transporte de energia, o que a torna mais importante que a velocidade de fase.

CAPÍTULO 3

A Equação de Korteweg-de Vries (KdV)

A equação de KdV, que recebe este nome em homenagem a seu par de descobridores Diederik Johannes Korteweg e Gustav de Vries, originalmente foi escrita para modelar a propagação de uma onda longa (amplitude muito menor que seu comprimento de onda) em um canal raso (comprimento do canal muito maior que profundidade).

A KdV é uma equação com grandes características de universalidade, é em um certo sentido, a equação mais elementar que inclui efeitos não-lineares e dispersivos. Para estudá-la com mais detalhes, consideramos primeiramente a equação da onda livre, reescrita em forma de um produto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0$$

onde u é o perfil da onda. É importante notar que x (posição) e t (tempo) não são medidos por um observador estacionário, mas sim por um observador em movimento.

Assim, se $\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, então a equação da onda é satisfeita.

Adotando a convenção de sub-índices para denotar derivadas parciais e fazendo as transformações x e t , a equação da onda livre pode ser reescrita de outra forma mais simples dada por

$$u_t + v u_x = 0,$$

onde v é uma constante (identificada como a velocidade) e $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ e $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Ela descreve a propagação de um perfil $u(x, t)$ após um tempo t em um ponto x da reta. Pode-se verificar que a sua solução é dada por $u(x, t) = f(x - vt)$ onde f é uma função que descreve o perfil em $t = 0$. A presença do termo $x - vt$ indica uma translação para a direita do perfil descrito por f com uma velocidade v .

Um dos grandes avanços do século XIX foi o aparecimento da análise de Fourier. A idéia básica é a decomposição de funções arbitrárias como a superposição de senos e cossenos ou, mais geralmente, de exponenciais complexas. À análise de Fourier, cujo desenvolvimento teórico só se completou no século XX, se mostrou instrumental no estudo de sinais e da propagação de ondas, bem como no estudo de equações diferenciais lineares.

Considerando novamente a equação $u_t + vu_x = 0$, a ideia é buscar uma solução da forma $A \exp i(kx - \omega t)$. A interpretação de uma solução desta forma é que para cada x fixo temos uma oscilação harmônica com período $T = 2\pi/\omega$. Para cada tempo fixo, temos uma perturbação periódica que se repete após um deslocamento de $\lambda = 2\pi/k$.

Quando exigimos que $\exp i(kx - \omega t)$ seja solução de $u_t + vu_x = 0$, obtemos a relação $v = \omega/k = \lambda/T$ que nos relaciona a frequência das oscilações espaciais com as temporais. A possibilidade de usar funções da forma $\exp i(kx - \omega t)$ para estudar equações lineares mais complexas, ou mesmo equações não-lineares, foi um grande avanço tanto teórico quanto prático. Por exemplo se considerarmos uma equação da forma

$$u_t + vu_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad 3.3$$

ao substituírmos $u = \exp i(kx - \omega t)$ obtemos

$$\omega = vk - \beta k^3 \quad 3.4$$

Agora, diferente do caso em que $\beta = 0$, temos que harmônicos de diferentes frequências se propagam com velocidades distintas. Isto dá origem a certa distorção do sinal. Quando $\beta = 0$ retornamos à equação da onda livre. Ao fenômeno de propagação de frequências distintas com velocidades distintas chamamos de dispersão. A relação entre ω e k , tal como na equação acima, é chamada de relação de dispersão.

Considerando novamente a equação $u_t + \nu u_x = 0$, a maneira mais simples de incluirmos um termo não-linear é considerar a velocidade ν como uma função de u . Portanto o exemplo mais simples de uma equação não-linear é dado, após uma mudança de escalas, por $u_t + uu_x = 0$. Esta equação é chamada de equação de Burgers. Uma de suas características notáveis é a presença de choque, ou mais formalmente, a perda de continuidade da solução após um tempo. Neste caso, para que o conceito de derivada ainda faça sentido, temos que trabalhar com soluções fracas da equação, ou seja, com distribuições.

O choque se dá pelo seguinte motivo: dada uma condição inicial arbitrária, olhando a equação de evolução e comparando-a com a equação de onda vemos que a velocidade com que a onda se propaga é proporcional à sua altura, ou seja, ao valor de u . Assim a crista se propaga mais rápido, inclinando a perturbação na direção de propagação até que a onda “quebra”, tal qual uma onda do mar.

Desta forma os efeitos da dispersão e da não-linearidade são, em certo sentido, opostos. Enquanto a dispersão tende a atenuar a oscilação, a não-linearidade tende a torná-la mais abrupta. A equação de KdV inclui ambos os efeitos, o que pode ser facilmente verificado olhando cada um dos seus termos. Isto explica nossa afirmação que ela é a equação mais simples que inclui estes dois efeitos. A forma mais simplificada da equação de KdV é dada por

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad 3.5$$

CAPÍTULO 4

Linhas de Transmissões Elétricas

Atualmente, as linhas de transmissão lineares proporcionam ligações viáveis em praticamente todos os sistemas de comunicação e computacionais. A linha de transmissão linear padrão que será analisada é um sistema importante, que está disponível para dar suporte à propagação de modos eletromagnéticos transversais, e esta é interessante para ser utilizada em muitas situações práticas. Na sua forma mais simples elas são utilizadas nos telefones e telégrafos e suas equações lineares são chamadas de “equações dos telegrafistas”.

4.1 – Linhas de transmissão Linear sem Dispersão

Primeiramente abordamos somente linhas de transmissão elétricas lineares, inicialmente sem perdas ôhmicas e infinitas para depois abordarmos os aspectos de dispersão.

Essa rede é formada por células cada qual contendo um capacitor e um indutor, ela possui uma quantidade infinita de células.

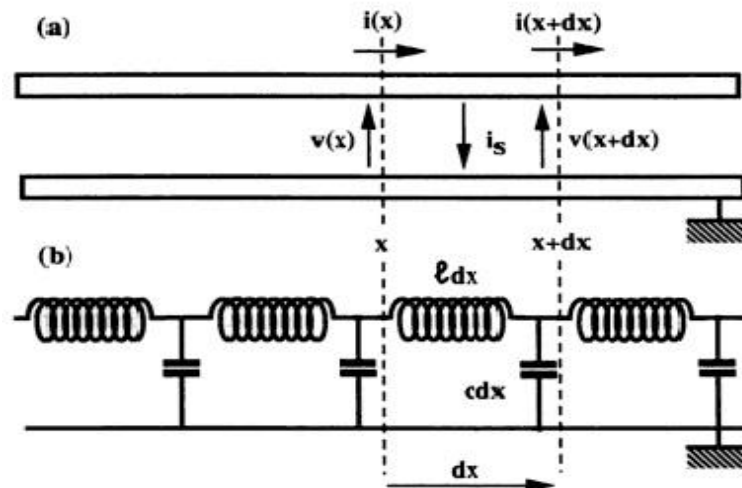


Figura 6: (a): Linha de Transmissão contínua aterrada e sem perdas.

(b): Circuito elétrico equivalente.

Na figura acima, $i(x)$ é a corrente da posição x , e $V(x)$ é a voltagem ao longo de cada célula; e l e c são a indutância e a capacitância por unidade de comprimento.

Através da lei de Kirchhoff obtemos a diferença de potencial V entre as indutâncias por um dado comprimento dx , dada por:

$$V(x) - V(x + dx) = dx \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \Phi = li \quad 4.0$$

$$V(x) - V(x + dx) = dx l \frac{\partial i(x)}{\partial t} \quad 4.1$$

Aqui, Φ é o fluxo do campo magnético total por unidade de comprimento entre os dois capacitores, i é a corrente e l é a indutância por unidade de comprimento.

Usando o mesmo procedimento para a corrente entre as capacitâncias e assumindo que dx é um diferencial podemos usar a expansão de Taylor, fazendo um sistema com a equação, obtendo duas relações: uma para voltagem e uma para corrente.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -l \frac{\partial i}{\partial t} \quad 4.2$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -c \frac{\partial V}{\partial t} \quad 4.3$$

Aqui, c é a capacitância por unidade de comprimento.

Então derivando a primeira equação em relação à x e a segunda em relação à y , podemos igualar as duas pelo termo $\partial^2 i / \partial x \partial t$, obtendo assim a equação da onda para esse primeiro circuito.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - v_0^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0; \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{lc}} \quad 4.4$$

Nesta equação, v_0 é a velocidade de propagação da onda.

A equação da onda é invariante por transformação de sinais, ou seja, é reversível no tempo e pode se propagar em ambas direções. Então, também podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$V(x, t) = f(x - v_0 t) + g(x + v_0 t) \quad 4.5$$

onde f e g são ondas se propagando na direção x positiva e negativa, respectivamente.

A análise da propagação da onda senoidal é muito importante, pois pode servir de base para discussão de propagação de outras formas de onda, sendo que f e g podem ser quaisquer tipos de onda e, se propagam com perfil constante e com velocidade que é determinada pelos parâmetros da linha de transmissão linear sem dispersão.

Considerando uma onda se propagando pela linha de transmissão na direção x positiva. Neste caso, $g = 0$ temos:

$$V(x, t) = f(x - v_0 t)$$

Assumindo que temos um trem de ondas senoidais. Quando nós examinamos o formato da onda em um dado ponto x da linha de transmissão, observamos uma voltagem periódica que é uma função senoidal do tempo.

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

Aqui, ω é a frequência angular do sinal periódico e V_0 é a amplitude. A frequência angular é relacionada ao período T por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Esta relação indica que a fase da onda muda de 0 a 2π quando T muda de 0 a T . Conectando as pontas do osciloscópio em diferentes pontos equidistantes da linha para um tempo $t = 0$, obtemos:

$$V(x) = V_0 \cos(kx)$$

Aqui, a quantidade k representa a periodicidade na coordenada x e é chamada número de onda. Que pode ser considerada como a frequência espacial da onda e esta relacionada com o comprimento de onda λ por:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Esta relação significa que a fase da onda muda de 0 a 2π quando x varia de 0 a λ . Comparando as equações podemos escrever:

$$V(x, t) = V_0 \cos k(x - v_0 t) = V_0 \cos(kx - \omega t)$$

O argumento $\theta(x,t) = k(x - v_0 t) = (kx - \omega t)$ é chamado de fase da onda, e pontos de fases constantes são aqueles onde a forma de onda tem o mesmo valor. Com máxima crista ou mínimo vale. A partir da relação acima temos:

$$v_0 = \frac{\omega}{k} = \text{constante.}$$

Nesta equação v_0 é a velocidade de fase e é chamada de relação de dispersão. As ondas descritas por esta equação têm velocidade de fase constante independentemente das frequências e comprimento de onda e as ondas resultantes não sofrem dispersão, Figura 7.

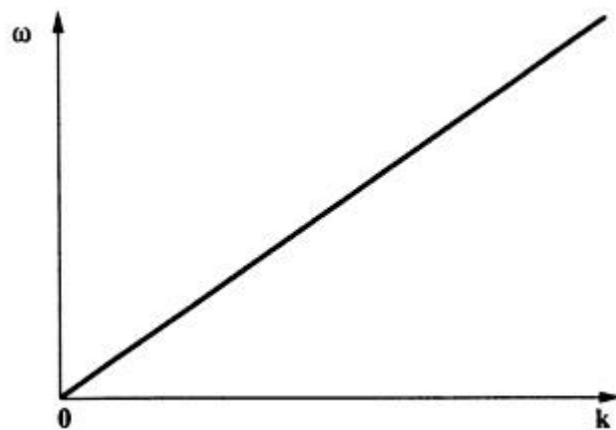


Figura 7: Frequência ω versus vetor de onda k para uma onda não dispersiva.

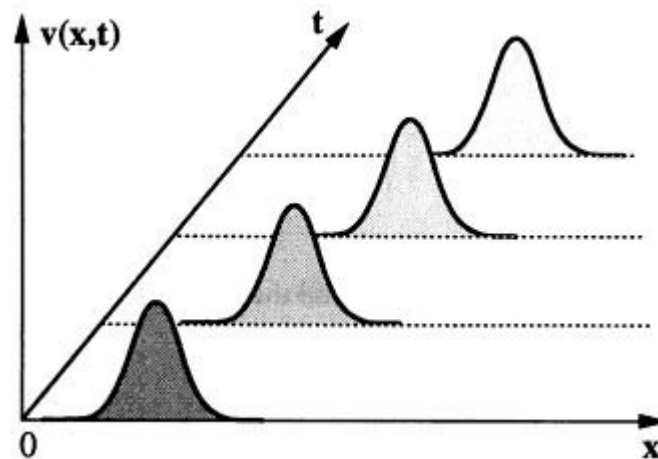


Figura 8: Propagação sem deformação de um pulso de onda numa linha de transmissão linear não dispersiva.

4.2 – Linhas de transmissão Linear Dispersiva

Quando ocorre o fenômeno de dispersão, as velocidades de grupo e de fase se tornam função do número de onda. Isso significa que cada parte da onda terá velocidade diferente causando o espalhamento, ou dispersão, da sua forma original.

4.2.1 – Linhas de transmissão Linear Discreta

Consideraremos agora uma linha de transmissão linear discreta, ou seja, os componentes dessa rede são idênticos: indutores lineares, representados por L e capacitores lineares representados por C . Temos também um número grande N de células idênticas (Figura 9).

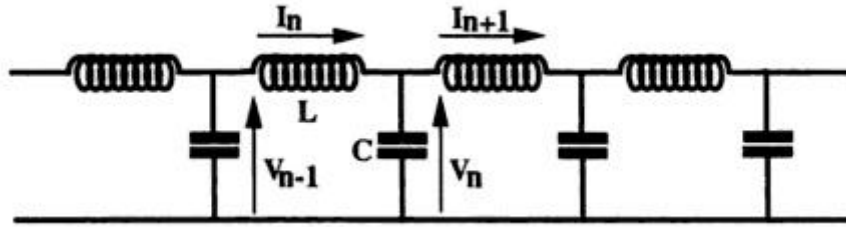


Figura 9: Circuito equivalente de uma rede elétrica.

Em uma primeira aproximação, desprezaremos pequenas dissipações e não homogeneidades introduzidas pelos componentes.

Temos que $V_n(t)$ é a voltagem através de um n -ésimo capacitor e $I_n(t)$ é a corrente através da n -ésima indutância.

Utilizando as leis de Kirchhoff, obtemos:

$$V_{n-1} - V_n = \frac{d\phi_n}{dt} \quad , \quad I_{n-1} - I_n = \frac{dQ_n}{dt} \quad 4.6$$

$$\phi_n = LI_n \quad , \quad Q_n = CV_n$$

$$\frac{dV_n}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dQ_n}{dt} = \frac{1}{C} (I_n - I_{n+1}) = \frac{1}{C} \left(\frac{\phi_n}{L} - \frac{\phi_{n+1}}{L} \right)$$

$$\frac{d^2 V_n}{dt^2} = \frac{1}{CL} (V_{n-1} - V_n - V_n + V_{n+1}) = \frac{1}{LC} (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n), \quad n=1,2,3...$$

Do mesmo modo:

$$\frac{dI_n}{dt} = \frac{1}{L} \frac{d\phi_n}{dt} = \frac{1}{L} (V_{n-1} - V_n) = \frac{1}{LC} (Q_{n-1} - Q_n) \quad 4.7$$

$$\frac{d^2 I_n}{dt^2} = \frac{1}{CL} \left(\frac{dQ_{n-1}}{dt} - \frac{dQ_n}{dt} \right) = \frac{1}{LC} (I_{n-1} - I_n - I_n + I_{n+1}) = \frac{1}{LC} (I_{n+1} + I_{n-1} - 2I_n) \quad 4.8$$

Nestas equações, ϕ_n é o fluxo magnético e Q_n é a carga elétrica.

Se considerarmos a solução harmônica do tipo:

$$V_n(t) = V_0 \operatorname{Re}(e^{i(\omega t - \kappa n)}) \quad 4.9$$

e, se considerarmos também uma expressão similar para $V_{n+1}(t)$ e $V_{n-1}(t)$ com n sendo o índice de comprimento dado por $n = x/\delta$, com δ sendo uma unidade de rede teremos:

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= V_0 \operatorname{Re}(e^{i(\omega t - \kappa(n+1))}) = e^{-i\kappa} V_n \\ V_{n-1} &= V_0 \operatorname{Re}(e^{i(\omega t - \kappa(n-1))}) = e^{i\kappa} V_n \\ (i\omega)^2 V_n &= \frac{1}{LC} (e^{-i\kappa} V_n + e^{i\kappa} V_n - 2V_n) \\ -\omega^2 &= \frac{1}{LC} (e^{i\kappa} + e^{-i\kappa} - 2) \end{aligned}$$

Com $\omega_c = 2/\sqrt{LC}$ a relação de dispersão das ondas da rede elétrica é dada por:

$$\begin{aligned} -\omega^2 &= \frac{1}{LC} \left(e^{\frac{i\kappa}{2}} - e^{\frac{-i\kappa}{2}} \right)^2 = \frac{1}{LC} 4(-1) \operatorname{sen}^2 \frac{\kappa}{2} \\ \omega^2 &= \omega_c^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\kappa}{2} \end{aligned}$$

Como a velocidade de fase da onda é ω/κ , se mantivermos $\omega > 0$ e aceitarmos valores negativos e positivos, teremos ondas que viajam tanto no eixo positivo quanto no eixo negativo. Assumindo essa convenção, a relação de dispersão se torna:

$$\omega = \omega_c \left| \operatorname{sen} \frac{\kappa}{2} \right| \quad 4.10$$

Nesse caso, para valores de κ que vão de 0 a π , ω se torna uma função de κ e a velocidade de fase depende do modo considerado:

$$v(\kappa) = \frac{\omega_c}{2} \left| \sin \frac{\kappa}{2} \right| \quad 4.11$$

A velocidade de grupo v_g é diferente de v sendo:

$$V_g(\kappa) = \frac{\omega_c}{\kappa} \left| \cos \frac{\kappa}{2} \right| \quad 4.12$$

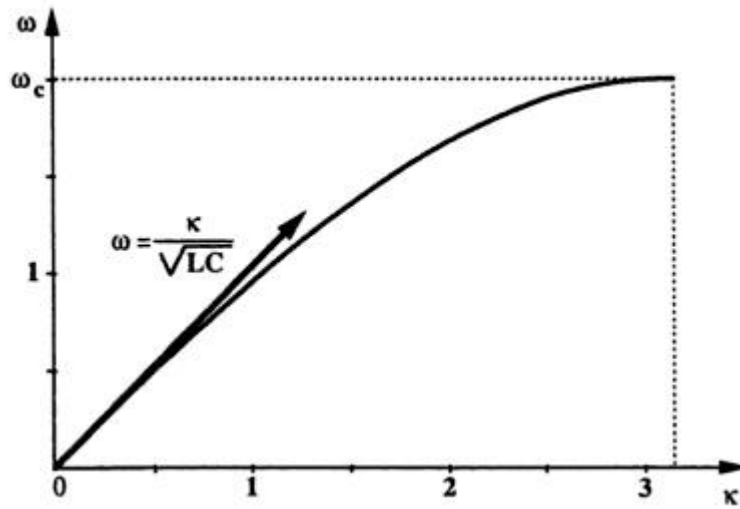


Figura 10: Diagrama representando a relação de dispersão das ondas dispersivas em uma linha de transmissão LC. A linha reta representa o caso não dispersivo.

Do gráfico da Figura 10, notamos que: $\omega = \omega_c$ é a frequência de corte; não há modos com frequência $\omega > \omega_c$ se propagando na rede elétrica. Este é o princípio do filtro passa-baixa. A dispersão, ao contrário da linha de transmissão linear contínua, surge da estrutura discreta da rede elétrica com seções de período LC sendo, portanto, espacial. O pulso se espalhará ao se propagar ao longo desta rede.

4.2.2 – Limite de dispersão fraca

Consideremos o limite de dispersão fraca no seguinte sistema discreto de equações lineares:

$$\frac{d^2 V_n}{dt^2} = \frac{1}{LC} (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n); n = 1, 2, 3, \dots$$

Como a voltagem varia pouco de uma seção unitária para outra, o índice discreto n pode ser considerado uma variável contínua x e assim podemos usar a expansão de Taylor.

$$V_n(t) \rightarrow V(x, t) \quad 4.13a$$

$$V_{n+1} = V + \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial n^3} + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 V}{\partial n^4} + \dots \quad 4.13b$$

$$V_{n-1} = V - \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial n^3} + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 V}{\partial n^4} + \dots \quad 4.13b$$

Agora para $\frac{\partial^2 V_n}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n)$, quando $V_n(t) \rightarrow V(x, t)$ e usando

$x = n\delta$, temos:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\delta^2}{LC} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\delta^4}{12LC} \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \dots \quad 4.14$$

Esta equação é linear e dispersiva, o termo de dispersão é da ordem de δ^4 . A relação de dispersão correspondente é obtida se substituirmos a solução senoidal do tipo $V_n = V_0 \text{Re}(e^{i(\omega t - \kappa x)})$ com $\kappa = k\delta$. Assim obtemos a relação de dispersão

$$\omega = V_0 k \sqrt{\left(1 - \frac{\delta^2 k^2}{12}\right)} \quad 4.15a$$

com $V_0 = \frac{\delta}{\sqrt{LC}} \quad 4.15b$

A dispersão corresponde ao limite k pequeno, ou ao comprimento de onda grande. A velocidade de fase também depende do número de onda.

O limite de dispersão foi derivado com o fenômeno de onda longa em mente, ou seja, k deve ser pequeno, porque de outra forma, do ponto de vista matemático, ω se tornaria imaginário para k grande.

Se na equação 4.14 δ for da ordem δ^2 ela se reduz a equação da onda sem dispersão para uma linha de transmissão contínua, ou seja, no limite $k = \frac{2\pi}{\lambda} \ll 1$. A relação de dispersão 4.15 se reduz a relação linear semelhante

à encontrada para linha de transmissão contínua, $\omega = v_0 k = \frac{k}{\sqrt{LC}}$ onde v_0 é a velocidade de propagação de ondas, com comprimentos de onda muito grande, comparados com a discreta da rede elétrica. Neste limite o comprimento de onda é tão grande que a onda não sente a rede, que se comporta como uma linha de transmissão contínua.

4.3 – A evolução do pacote de onda

Para introduzirmos o conceito de dispersão pelo pacote de onda é necessário considerarmos que a onda carregada possui frequência constante ω_0 e número de onda k_0 , e já modulada pela onda Ψ , variando vagarosamente em relação ao espaço e tempo da onda carregada. Com isso, a voltagem torna-se:

$$V = \text{Re}[\Psi(X, T)e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}] \quad 4.16$$

na qual $X = \varepsilon x$ e $T = \varepsilon t$, $\varepsilon \ll 1$, mostrando a pequena variação do pacote de onda no tempo e no espaço em relação a onda carregada. Podemos também usar a expansão de Taylor de ω em relação a k , substituindo o conceito de velocidade de grupo v , colocando então $\omega - \omega_0 = \Omega$ e $k - k_0 = K$, obtemos a partir da expansão:

$$\Omega = v_g K + PK^2 \quad 4.17$$

A equação 4.17 é a relação de dispersão do envelope de ondas, válida na vizinhança de uma frequência particular ω_0 e relacionada com o número de onda k_0 . Agora, usando as variáveis de Fourier Ω e K , as quais correspondem às variáveis lentas no espaço X e T , nós podemos escrever a transformada de Fourier (\mathfrak{Z}) da função envelope e a sua transformada inversa \mathfrak{Z}^{-1} :

$$\Psi(k, \Omega) = \mathfrak{Z}(\Psi(X, T)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(X, T) e^{i(\Omega T - KX)} dX dT$$

$$\Psi(X, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(X', T') e^{i(\Omega T - KX)} dX' dT' e^{-i(\Omega T - KX)} d\Omega dK$$

Neste ponto destacamos que:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X} = ik \mathfrak{Z}^{-1}(\Psi(k, \Omega))$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial T} = -i\Omega \mathfrak{Z}^{-1}(\Psi(k, \Omega))$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} = (ik)^2 \mathfrak{Z}^{-1}(\Psi(k, \Omega))$$

Na relação de dispersão 4.17 do envelope de ondas os termos Ω e K são pequenos e de ordem ϵ pequeno ($\epsilon \ll 1$). Eles podem ser substituídos pelos operadores $i = i\hbar$ e $P = \hbar/2m$ e então nos levar a expressão resultante para a função envelope $\Psi(X, T)$:

$$i \left[\epsilon \frac{\partial \Psi}{\partial T} + \epsilon V_g \frac{\partial \Psi}{\partial X} \right] + \epsilon^2 P \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} = 0 \quad 4.18$$

Os primeiros dois termos de 4.18 representam a propagação sem dispersão do envelope numa velocidade de grupo v_g , e o terceiro termo representa a distorção linear. Se considerarmos $P = 0$ (relação de dispersão nula), a solução de 4.6 pode ser expressa em termos de uma função arbitrária $(X - v_g T)$. Consequentemente, encontramos que a substituição:

$$\xi = X - v_g T; \tau = \epsilon T$$

que nos leva às seguintes derivadas

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \xi}; \frac{\partial^2}{\partial X^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial T} = -v_g \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}$$

Isto nos permite eliminar o termo $\partial\psi/\partial X$ e transformar 4.18 em:

$$i\varepsilon^2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \varepsilon^2 P \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0$$

Esta equação linear governa a evolução do pacote de ondas. Notamos que se fizermos as seguintes substituições:

$$i \Leftrightarrow i\hbar; \hbar = \frac{h}{2\pi}; P \Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m}$$

A equação 4.18 ficara formalmente semelhante à equação de Schrödinger de uma partícula livre de massa m .

A equação 4.18 pode ser resolvida para dar a solução:

$$\psi(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(k, 0) e^{-i(Pk^2\tau - k\xi)} dk \quad 4.19$$

onde $\psi(k, 0)$ é a transformada de Fourier do pacote de onda $\psi(\xi, 0)$ quando $\tau = 0$; k é o numero de onda associado a ξ . Esta solução mostra que a dispersão da velocidade de grupo dada por $2P$ modifica a fase de cada componente de Fourier do envelope por uma quantidade que depende de k^2 e τ .

Como resultado, temos que ao se propagar, o pacote de onda se deforma.

4.4 – Abertura do pacote de onda por dispersão induzida

Como um exemplo simples, suponhamos que o pacote de onda consista num pulso gaussiano, ilustrado na Figura 11. O envelope na forma de sino, em $\tau = 0$, pode ser expresso:

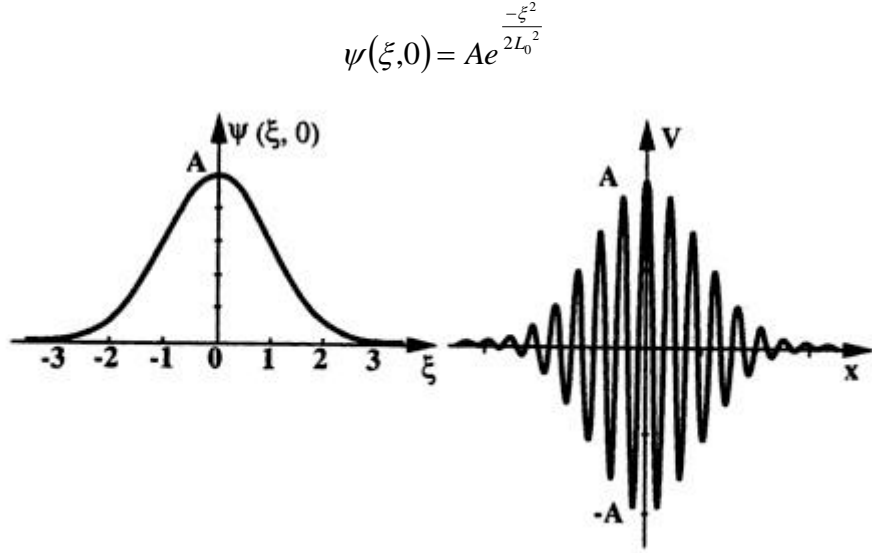


Figura 11: Função envelope gaussiana em um certo tempo inicial e sua voltagem correspondente.

Esta função é simétrica, onde A é a amplitude e L_0 é a meia largura. Na pratica, usa-se a largura inteira à metade do máximo ou meia altura $Lf\omega$:

$$\frac{\psi_{\max}}{2} = \psi \Rightarrow \frac{A}{2} = Ae^{\frac{-\xi^2}{2L_0^2}}$$

$$\ln \frac{1}{2} = \frac{-\xi^2}{2L_0^2}$$

$$\xi^2 = 2L_0^2 \ln 2$$

$$2\xi = 2L_0 \sqrt{2 \ln 2} = Lf\omega$$

Podemos calcular a função envelope ψ em termos das variáveis X e T . Relacionadas à ξ e τ levando ao seguinte resultado:

$$(X, T) = \frac{A}{\sqrt{1 + \frac{2iP}{L_0^2} \varepsilon T}} \exp \left[-\frac{(x - V_g T)^2}{2L_0^2 \left(1 + \frac{2iP \varepsilon T}{L_0^2} \right)} \right] \quad 4.20$$

A parte real dessa expressão representa a parte física do envelope de onda. Multiplicando 4.20 pelo seu complexo conjugado temos o modulo do pacote de onda ao quadrado:

$$|\psi|^2 = \frac{A}{\left(1 + \left(\frac{2PT\varepsilon}{L_0^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{(X - V_g T)}{L_0^2 \left(1 + \left(\frac{2P\varepsilon T}{L_0^2}\right)^2\right)} \right] \quad 4.21$$

Podemos observar que o $|\psi|^2$ é proporcional ao conteúdo de energia do pacote de onda. Notamos que, como já era esperado, com a presença da dispersão da velocidade de grupo $2P$, o pacote de onda se dispersa ao se propagar.

Em $T = 0$ recuperamos $|\psi(\xi, 0)|^2$ do valor absoluto do pacote de onda inicial. A largura, que era L_0 em T_0 se torna L em T :

$$L = L_0 \sqrt{1 + \left(\frac{T}{Td}\right)^2} \quad 4.22$$

O espalhamento é governado pelo tempo de dispersão Td .

A amplitude simultaneamente decresce com o tempo enquanto o pacote viaja com velocidade v_g . O comprimento de dispersão $Ld = v_g Td$ é uma escala de comprimento sobre a qual os efeitos de dispersão tornam-se significativos.

Entretanto, o pacote de onda continua uma gaussiana com área constante. Obviamente, toda a energia está onde o pacote está e a constância da área expressa a conservação da energia, fazendo o pulso se mover como um todo com uma velocidade de grupo. A abertura do pacote é independente do sinal da dispersão da velocidade de grupo. Podemos escrever:

$$\psi(X, T) = |\psi(X, T)| e^{-i\phi(X, T)} \quad 4.23$$

Aqui, $\phi(X, T)$ é a fase da onda e esta é calculada para ter o seguinte resultado:

$$\phi(X, T) = \arctan\left(\frac{2PT}{L_0^2}\right) + \frac{(X - V_g T)^2}{2L_0^2} \frac{\frac{2PT}{L_0^2}}{\left[1 + \left(\frac{2PT}{L_0^2}\right)^2\right]}$$

Como:

$$V = \text{Re}\left[\psi(X, T)e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}\right] \quad X = \varepsilon x; T = \varepsilon t$$

$$V = |\psi| \cos \Phi$$

Temos, que a presença de ε nos lembra que o modulo e a fase do envelope varia devagar no espaço e no tempo. A fase total do pacote é:

$$\Phi = k_0 x - \omega_0 t + \phi(\varepsilon x, \varepsilon t) \quad 4.24$$

CAPÍTULO 5

Sólitons em linhas de transmissão não-lineares

A extensão natural de linhas de transmissão lineares para não-lineares, onde ondas robustas localizadas com perfil permanente conhecidas como ondas solitárias ou sólitons podem se propagar, foi considerada somente durante as ultimas décadas. Linhas de transmissão elétricas não-lineares são talvez os dispositivos mais simples para observar e estudar quantitativamente a propagação e propriedades de ondas não-lineares. Além do mais, são relativamente baratas e de fácil construção, tornando-se familiar com as propriedades essenciais do sóliton.

Vamos examinar o efeito da não-linearidade na forma da onda se propagando numa linha de transmissão elétrica não-dispersiva. Vamos descobrir o sóliton ao examinarmos o caso onde dispersão e não-linearidade podem se balancear para produzir um pulso de perfil permanente.

5.1 - Não-linearidade na rede elétrica

Se na linha de transmissão as amplitudes da voltagem e da corrente i aumentam, os efeitos não-lineares não podem ser ignorados. Em outras palavras a capacitância e a indutância não são mais constantes, mas são função da voltagem e da corrente. Porém para componentes de mesmo padrão com voltagem e corrente muito grande os efeitos não-lineares são pequenos. Para observá-lo é preciso o uso de componentes específicos com não-linearidade apreciável com esses componentes, ao invés de equações diferenciais a derivadas parciais temos um sistema de equações diferenciais de primeira ordem não-linear.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = l(i) \frac{\partial i}{\partial t} \quad 5.1a$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -c(v) \frac{\partial v}{\partial t} \quad 5.1b$$

Para simplificar vamos ver o caso onde L é independente de i , mas a capacitância é dependente da voltagem. A capacitância não-linear utilizada é a que consiste em diodos MV209 da Motorola a relação capacitância-voltagem pode ser aproximada pela expansão polinomial [2]

$$C(V) = C_0(1 + a_1 V_1 + a_2 V^2 + \dots) \quad 5.2a$$

Para voltagem suficientemente pequena, mantemos os dois primeiros termos da expansão:

$$C(V) = C_0(1 - 2bV) \quad 5.2b,$$

Com $b = -\frac{a_1}{2}$, onde o coeficiente não-linear b é pequeno.

Observamos que o primeiro efeito da não-linearidade é para criar harmônico. Assumimos que inicialmente $V = A \cos(\omega t + kx)$.

Em seguida obtemos o segundo harmônico da equação 5.1b

$$\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \omega A \sin(\omega t - kx) - A^2 b C_0 \omega \sin 2(\omega t - kx) \quad 5.3$$

Agora assumimos que a solução das equações (5.1a e 5.2b) seja da forma

$$v = f\left(x \pm \frac{1}{\sqrt{LC(V)}} t\right) \quad 5.4$$

com ela obtemos

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} (1 + bV) \quad 5.5$$

que é a velocidade de propagação e depende da voltagem.

Assumindo que 5.4 e 5.5 são soluções corretas. Para uma onda que se propaga na direção positiva do eixo x defini-se a variável $s = \left(x - \frac{1}{\sqrt{LC(V)}} t\right)$ onde s é a coordenada espacial que se move com velocidade $\frac{1}{\sqrt{LC(V)}}$, e também é função de x e t.

Encontramos

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\frac{\partial V}{\partial s}}{1 + b(LC_0)^{\frac{1}{2}} t \frac{\partial V}{\partial s}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial s}}{1 + \beta t \frac{\partial V}{\partial s}} \quad 5.6$$

esta equação expressa a derivada da voltagem como função de (x e t) em termos da derivada em s. Aqui x é a posição num instante t de um ponto inicialmente em s.

Colocando-se $\beta = \frac{b}{\sqrt{IC_0}}$ notamos que dV/dx é infinito no instante

$t = \frac{-1}{\beta \partial V / \partial s}$ se $\partial V / \partial s$ for negativo.

Portanto, se a onda inicialmente tem derivada negativa tal que $\frac{\partial V}{\partial s} = -\left|\frac{\partial V}{\partial s}\right|$ num ponto s , então para $t > \tau = \frac{1}{\beta(\partial V / \partial s)}$ a solução não é mais single-valued na vizinhança do ponto $x_0 = s_0 + \tau \cdot f(s_0)$. Aqui s_0 é o ponto onde τ tem seu valor mínimo.

Para encontrarmos as variações de um pulso inicial examinamos (5.6) no instante $t = \tau + \delta$.

Quando ocorre a diminuição da capacitância $C(V)$ com a tensão V crescente, esperamos que as partes de alta tensão da onda se propaguem mais rápido do que as partes de baixa tensão. Qualitativamente, como o tempo evolui, o pico de um pulso de voltagem pode ultrapassar o fundo, e uma onda com uma frente de inclinação é conduzida a uma descontinuidade como se observa na Figura 12.

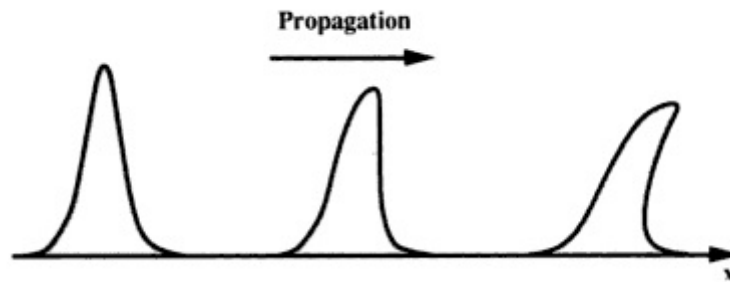


Figura 12: Os pontos de grande amplitude ultrapassam os pontos de pequena amplitude num pulso de onda não-linear.

De acordo com resultados analíticos, com o aumento do tempo a onda é progressivamente deformada. É instrutivo comparar este resultado com a evolução e o pulso na sua forma linearizada, quando $b=0$. Neste caso, temos um pulso que se desloca com velocidade constante, sem alteração na sua forma.

Em seguida através da diferenciação de 5.1a em relação a x e a equação 5.1b em relação a t , obtemos a equação da onda:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - lC_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -bC_0 l \frac{\partial^2 V^2}{\partial t^2} \quad 5.7$$

O lado esquerdo da 5.7 contém os termos lineares. O lado direito consta a não-linearidade. Uma vez que 5.7 é uma combinação de 5.3a e 5.2b é a solução da onda de choque da forma de 5.4.

5.2 - Efeitos combinados de dispersão e não-linearidade

Até agora, a dispersão e a não-linearidade foram encontradas e discutidas separadamente. Vimos que para uma linha de transmissão linear dispersiva um pulso se espalha e se dispersa quando se propaga. Pelo contrário, para uma linha de transmissão não-linear e não dispersiva, o perfil de um pulso inicial se deforma e sua frente de onda tende a se tornar abrupta (com um salto de descontinuidade). Já numa linha de transmissão não-linear dispersiva, a dispersão balanceia os efeitos da não-linearidade, levando a uma onda tipo pulso que é uma onda solitária ou um sóliton que pode se propagar com velocidade e perfil constante.

Para mostrar isso, consideramos a rede elementar LC, com indutores lineares L e capacitores não-lineares C .

A capacitância não-linear $C(V_n)$ que depende da tensão V_n

$$C(V_n) = \frac{dQ_n(V_n)}{dV_n} \quad 5.8$$

Onde $Q_n(V_n)$ é a carga no n -ésimo capacitor. E $d\Phi_n = LdI_n$ é a indutância independente da corrente.

Sabendo que a dispersão espacial irá surgir a partir da estrutura discreta dos componentes.

$$V_{n-1} - V_n = \frac{d\Phi_n}{dt} \quad 5.9a$$

$$I_n - I_{n+1} = \frac{dQ_n}{dt} \quad 5.9b$$

A partir delas obtemos

$$\frac{d^2 Q_n}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[C(V_n) \frac{dV_n}{dt} \right] = \frac{1}{L} (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) \quad n=1,2,\dots \quad 5.10$$

E com a capacitância dependente da voltagem

$$C(V_n) = C_0 (1 - 2bV_n) \quad 5.11$$

Agora substituindo 5.11 em 5.10 temos

$$LC_0 \frac{d^2 V}{dt^2} - bC_0 L \frac{d^2 V^2}{dt^2} = (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) \quad n=1,2,\dots \quad 5.12$$

E

$$Q_n = C_0 (V_n - bV_n^2) \quad 5.13$$

O sistema não pode ser resolvido analiticamente, mas apenas através de métodos numéricos. Assim, para obter soluções aproximadas que empregam o limite contínuo e definir $x = n\delta$.

E assim chegamos a uma equação que descreve ondas que podem viajar tanto para esquerda quanto para direita

$$V_{tt} - \frac{\delta^2}{LC_0} V_{xx} = \frac{\delta^4}{12LC_0} V_{xxxx} + bV_{tt}^2 \quad 5.14$$

Esta é uma equação de onda fraca dispersiva e não-linear.

Expressando os termos em forma de derivadas parciais, temos o termo:

$$V_{tt} - \frac{\delta^2}{LC_0} V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Significa que a onda viaja para esquerda ou para direita.

O termo de derivada a quarta:

$$\frac{\delta^4}{12LC_0} V_{xxxx}; \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = V_{xxxx}$$

É um termo dispersivo de 4º ordem do sistema discreto.

E o termo:

$$bV_{tt}^2; V_{tt}^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} V^2 = \frac{\partial}{\partial t} \left(2V \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

É um termo não-linear que pode balancear a dispersão se for de 4º ordem.

A equação 5.14 descreve ondas que se propagam tanto para esquerda como para direita e é uma equação não-linear de limite dispersivo fraco.

5.3 – Ondas elétricas solitárias e pulsos solitônicos

Na equação 5.14, o termo não-linear pode balancear o termo dispersivo se for da mesma ordem. Sob esta condição, olhamos para uma solução localizada que não mude seu formato enquanto se propaga com velocidade constante: fazendo-se $V_0 = \delta/\sqrt{LC}$ e assumindo-se perfil permanente para a solução de 5.14 temos: $V(x,t) = V(x-vt) = V(s)$, onde $S = x - vt$ representa a posição no sistema de coordenadas que se move a velocidade v para o qual a onda parece estacionária. Podemos chegar à solução para a onda solitária.

Portanto:

$$(v^2 - v_0^2) V^2 = \frac{2bv^2}{3} V^3 + \frac{\partial^2 v_0^2}{12} \left(\frac{dV}{ds} \right)^2$$

Multiplicando a equação por $6/\delta^2 v_0^2$, obtemos:

$$\frac{6}{\delta^2 v_0^2} (v^2 - v_0^2) V^2 - \frac{6}{\delta^2 v_0^2} \frac{2bv^2}{3} V^3 + \frac{6}{\delta^2 v_0^2} \frac{\partial^2 v_0^2}{12} \left(\frac{dV}{dS} \right)^2$$

Para melhorar a notação fixamos:

$$U = \frac{6}{\delta^2 v_0^2} (v^2 - v_0^2), A = 4 \frac{bv^2}{\delta^2 v_0^2}$$

Substituindo U e A na equação após ser multiplicada por $6/\delta^2 v_0^2$ temos:

$$\Rightarrow AV^3 - UV^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dS} \right)^2 = 0$$

Quando isolamos o termo $\frac{dV}{dS}$ obtemos:

$$\frac{dV}{dS} = \sqrt{2(6UV^2 - AV^3)}$$

Agora fazemos a integração,

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{2U \left(V^2 - \frac{AV^3}{U} \right)}} = \int_{s_0}^s dS$$

Com uma mudança de variável,

$$W^2 = \frac{AV}{U} \Rightarrow 2WdW = \frac{A}{U} dV$$

$$\int_{s_0}^s dS = \int_{W_0}^W \frac{2WdWU}{A \sqrt{2U \left(\frac{U^2 W^4}{A^2} - \frac{AU^3 W^6}{UA^3} \right)}} = \frac{2}{\sqrt{2U}} \int_{W_0}^W \frac{dWW}{W^2 \sqrt{1 - W^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2U}} (\operatorname{arcsec} hW - \operatorname{arcsec} hW_0); W = \sqrt{\frac{AV}{U}}$$

$$\int_{s_0}^s dS = \frac{2}{\sqrt{2U}} (\operatorname{arcsec} hW - \operatorname{arcsec} h0); W_0 = 1$$

$$\operatorname{arcsec} hW = \frac{\sqrt{U}}{2} (S - S_0)$$

$$W = \sec h \left(\frac{\sqrt{U}}{2} (S - S_0) \right)$$

Como $V = UW^2/A$, temos

$$V = \frac{6(v^2 - v_0^2)\delta^2 v_0^2}{\delta^2 v_0^2 4bv^2} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{(x-vt)}{2}} \frac{6(v^2 - v_0^2)}{\delta^2 v_0^2} \right)$$

$$V = \frac{3}{2} \frac{(v^2 - v_0^2)}{bv^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{3(v^2 - v_0^2)}}{v_0} \frac{(x-vt)}{\delta} \right)$$

Como $x = n\delta$, temos:

$$V = \frac{3}{2} \frac{(v^2 - v_0^2)}{bv^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{3(v^2 - v_0^2)}}{v_0} \left(n - \frac{v}{\delta} t \right) \right) \quad 5.15$$

Para casos práticos a distância é expressa em seções ou células e as velocidades são expressas em seções ou células por segundo:

$$V = \frac{3}{2} \frac{(v^2 - v_0^2)}{bv^2} \quad 5.16$$

A equação 5.16 é a relação da velocidade com a amplitude.

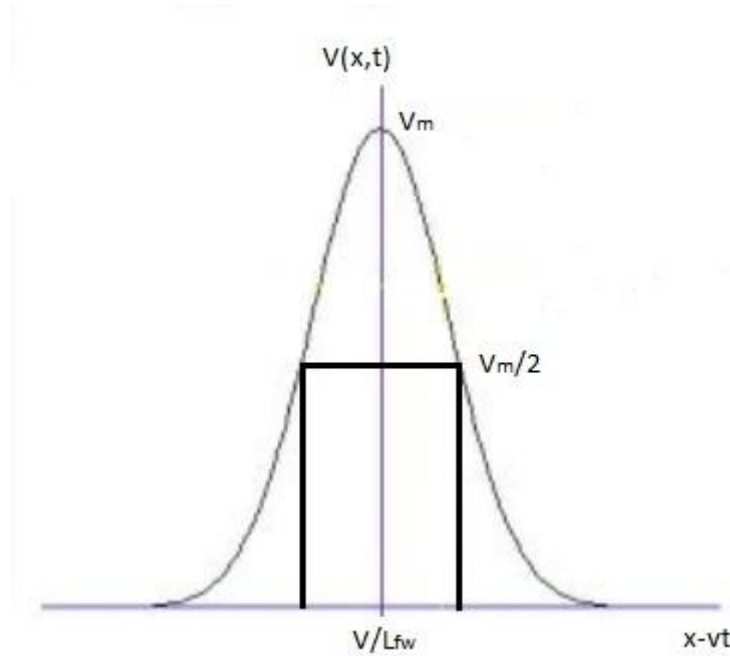


Figura 13: Representação da solução da onda solitária $V(x,t)$ dada por 5.16 e viajando a uma velocidade v .

A qual depende da velocidade v . Vamos calcular a largura da amplitude L_{fw} a qual é constante para uma dada amplitude ou velocidade. Assumindo que $t = 0$ e $x/\delta = n = L_{fw}/2$, temos:

$$V = V_m \sec h^2 \left(\alpha \left(n - \frac{vt}{\delta} \right) \right)$$

Onde,

$$\alpha = \frac{\sqrt{3(v^2 - v_0^2)}}{v_0} \quad \text{e} \quad V_m = \frac{3}{2b} \left(\frac{v^2 - v_0^2}{v_0^2} \right) = \frac{V_m}{2}$$

Substituindo na equação inicial temos:

$$\begin{aligned} V \left(\frac{Lfw}{2}, 0 \right) &= V_m \sec h^2 \left(\alpha \frac{Lfw}{2} \right) = \frac{V_m}{2} \\ \sec h^2 \left(\alpha \frac{Lfw}{2} \right) &= \frac{1}{2} \Rightarrow \sec h^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \alpha \frac{Lfw}{2} = 0,88 \\ \frac{Lfw}{2} &= 2 \frac{0,88}{\alpha} = \frac{v_0}{\sqrt{v^2 - v_0^2}} \\ Lfw &= 1,76 \frac{v_0}{\sqrt{3(v^2 - v_0^2)}} \approx \frac{v_0}{\sqrt{v^2 - v_0^2}} \end{aligned}$$

Para ondas viajando em uma única direção no limite dispersivo fraco, podemos a partir de 5.14 chegar a equação padrão não-linear que é a equação Korteweg de Vries (KdV). Ela admite soluções particulares da onda solitária chamada sólon:

$$V = \varepsilon V_1 = \frac{\varepsilon u}{8b} \sec h^2 \left(\sqrt{\frac{\varepsilon u}{2}} \left(n - \frac{VS}{\delta} t \right) \right) ; \quad VS = V_0 \left(1 + \frac{\varepsilon u}{24} \right)$$

A largura do sólon depende da velocidade.

Encontramos um sólon KdV como um caso de amplitude fraca da equação da onda solitária.

Para $v \approx v_0$ as formas de onda solitária e do sólon KdV são semelhantes e na pratica não se vê diferença. As propriedades do sólon KdV são:

- Sua amplitude cresce com a velocidade;
- Sua largura é inversamente proporcional ao quadrado de sua velocidade;
- É um pulso unidirecional, ou seja, sua velocidade não pode ser negativa para soluções de KdV, uma vez que a integração \sqrt{u} deve ser real;

- Sinal da solução sóliton depende do sinal do termo não-linear na equação de KdV.

CAPÍTULO 6

Versão miniaturizada de uma rede elétrica para experimentos com propagação solitônica.

A Figura 14 mostra a linha de transmissão elétrica previamente montada, ela é composta por 100 células indutivas capacitivas; Os indutores de $47\mu\text{H}$ e os capacitores não-lineares que consistem de diodo MV209 da Motorola. Ao aplicar qualquer tipo de sinal elétrico na entrada da linha, cria-se um pulso solitônico; a forma e o tempo de propagação são observados em diferentes pontos da linha, [3].

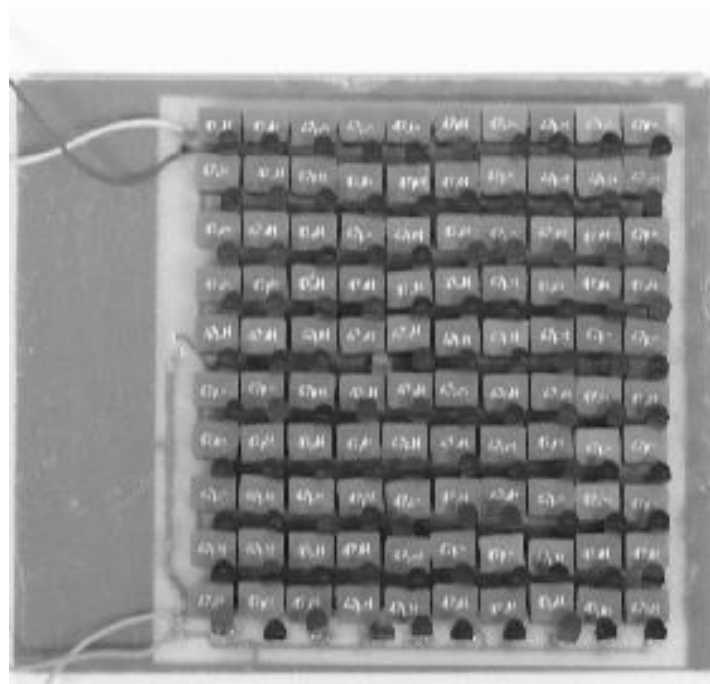


Figura 14 - Linha de transmissão.

A Figura 15 mostra o esquema completo. Além da linha de transmissão (Figura 13), foi utilizado um gerador de sinais que é um 33220A da Agilent Technologies; para obtenção dos dados foi utilizado um osciloscópio MO-1222 da Minipa.



Figura 15: Esquema completo para obtenção de sólitons elétricos.

Pode-se observar na Figura 16 que os sinais de entrada vão tomando a forma de $\text{sech}^2 x$ que é uma das soluções da Equação de KdV, que descreve este tipo de sóliton. Também se observa que a velocidade e a forma dos sólitons têm pouca variação.



Figura 16: Forma do sóliton na célula 100.

Por meio deste experimento foi feito um estudo preliminar da propagação de sólitons numa linha de transmissão elétrica composta por 100 células indutivas capacitivas.

Conclusão

Através deste trabalho foi possível analisar as propriedades do sóliton que se propaga numa linha de transmissão, que é um pulso de amplitude constante ou uma onda solitária muito estável, que é a solução exata de uma equação da onda (Equação de Korteweg De Vries), a qual formato e velocidade não são alterados por colisão com outro sóliton.

Para chegar a esta conclusão, tivemos que passar por vários caminhos: Analisamos linhas de transmissão lineares com e sem dispersão, redes elétricas e linhas de transmissão não-lineares e não-dispersivas.

Para uma linha de transmissão linear não-dispersiva, temos ondas livres que se propagam com perfil constante e com a mesma velocidade, que é determinada pelos parâmetros da linha. Já em uma linha linear, mas dispersiva, vimos que, o pulso tem sua amplitude reduzida devido à diferença de velocidade de fase de cada componente de onda que forma o pulso. O mesmo fenômeno foi visto em uma rede elétrica, porém, para este caso, a dispersão é espacial, ou seja, surge devido à estrutura discreta da rede.

Para uma linha de transmissão não-linear e não-dispersiva, podemos perceber a formação de ondas de choque pelo seguinte fato: a capacitância depende da voltagem. Se esta diminui, teremos partes da onda se propagando mais rápido que as outras, gerando uma onda abrupta, pois com o passar do tempo, o topo de voltagem pode ultrapassar a base.

Finalmente, vimos que a dispersão e a não-linearidade podem se balancear se forem da mesma ordem e gerar o sóliton, que pode se propagar por distâncias muito grandes sem sofrer distorção. Reunindo estes efeitos e através de muitos cálculos

matemáticos, chegamos à equação de KdV que é uma equação padrão não-linear que se for derivada, admite soluções particulares da onda solitária, chamada sóliton.

Com o intuito de observar melhor toda a parte analítica, utilizamos uma linha de transmissão não-linear dispersiva previamente montada para realizarmos uma propagação solitônica.

Apesar de não obtermos resultados exatos, esta se mostrou como um meio laboratorial promissor para o estudo de sólitons elétricos, pois foi possível observar as principais características dos sólitons, como velocidade e forma constante. Concluímos que esta abordagem é promissora para futuros estudos de sólitons elétricos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] P.G. Drazim and R.S. Jonson, Sólitons: na introduction, Cambridge, 1996.
- [2] M. Remoissenet, Waves called sólitons: Concepts and Experiments, Spring-Verlag, 1999.
- [3] E.S Ferreira e R.M. Ricotta, Proceedings 8th Latin-American Congress: Electricity Generation and Transmission, Clogtee 2009.
- [4] Nussenzweig, H.M. , Curso de Física Básica, vol 2, Ed. Edgard Bucher Ltda, 1983.