

Gabriel Vieira Lobo

# **Sólitons e a Supercondutividade**

São Paulo

2015



Gabriel Vieira Lobo

## **Sólitons e a Supercondutividade**

Trabalho de Graduação apresentado à Faculdade de Tecnologia de São Paulo, como um dos pré-requisitos para a obtenção do título de Tecnólogo em Tecnologia em Materiais, sob a orientação da Profa. Dra. Regina Maria Ricotta.

Faculdade de Tecnologia de São Paulo

Orientador: Regina Maria Ricotta

São Paulo

2015

Gabriel Vieira Lobo

Sólitons e a Supercondutividade/ Gabriel Vieira Lobo. – São Paulo, 2015-  
84.

Orientador: Regina Maria Ricotta

Trabalho de Graduação – Faculdade de Tecnologia de São Paulo , 2015.

1. Sólitons. 2. Supercondutividade. 3. Efeito Josephson. I. Regina Maria Ricotta.  
II. Faculdade de Tecnologia de São Paulo. III. Sólitons e a Supercondutividade

Gabriel Vieira Lobo

## **Sólitons e a Supercondutividade**

Trabalho de Graduação apresentado à Faculdade de Tecnologia de São Paulo, como um dos pré-requisitos para a obtenção do título de Tecnólogo em Tecnologia em Materiais, sob a orientação da Profa. Dra. Regina Maria Ricotta.

Trabalho aprovado. São Paulo, 09 de dezembro de 2015:

---

**Regina Maria Ricotta**  
Orientador

---

**Francisco Tadeu Degasperi**  
Convidado 1

---

**Milton da Silva Rocha**  
Convidado 2

São Paulo  
2015



# Resumo

Este trabalho se propõe a abordar ondas do tipo sóliton a fim de ter contato com equações diferenciais não-lineares e dispersivas, que modelam diversos fenômenos físicos de interesse. Em particular sólitons estão presentes em junções supercondutoras, que são dispositivos ao redor de um material isolante. As cerâmicas supercondutoras, por suas propriedades em baixas temperaturas, como resistividade elétrica quase nula e diamagnetismo perfeito, fazem deste material um dos mais promissores pela quantidade de aplicações possíveis e motivam de maneira imediata esse estudo.

**Palavras-chave:** Sólitons. Supercondutividade. Efeito Josephson.





# Lista de ilustrações

Figura 1 – Onda progressiva que se movimenta para direita, temos em <b>(a)</b> : o perfil da onda $y(x, 0) = y'(x', 0)$ no instante $t = 0$ e em <b>(b)</b> : o perfil da onda no instante $t$ (NUSSENZVEIG, 2002). . . . .	18
Figura 2 – Esquema de uma linha de transmissão que consiste em pêndulos acoplados por uma mola (REMOISSENET, 1999). . . . .	25
Figura 3 – Representação da relação de dispersão para $k > 0$ . . . . .	27
Figura 4 – Representação de um sóliton kink e antikink, em linha contínua e pontilhada respectivamente. . . . .	29
Figura 5 – Representação do gradiente e velocidade de rotação em função de $s = X - uT$ com $u = 0.1$ . . . . .	30
Figura 6 – Representação da mudança de perfil de um kink devido a contração de Lorentz para diferentes velocidades $v$ . . . . .	32
Figura 7 – Esquema de uma junção Josephson (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 1963). . . . .	39
Figura 8 – Em <b>a</b> , esquema de uma junção Josephson pequena e em <b>b</b> , o circuito equivalente a junção pequena, a resistência equivale aos efeitos dissipativos aqui são ignorados (REMOISSENET, 1999). . . . .	39
Figura 9 – Esquema de uma junção Josephson longa (REMOISSENET, 1999). . . . .	41
Figura 10 – Esquema representando um circuito elétrico equivalente a uma junção Josephson longa não-dissipativa (REMOISSENET, 1999). . . . .	42
Figura 11 – Fluxon ao longo de uma junção josephson longa (VISSER, 2002). . . . .	43
Figura 12 – Em laranja um pulso de tensão e em azul um pulso de corrente, que viajam junto ao fluxon. . . . .	43
Figura 13 – Representação em 3D de um Breather, onde é possível ver seu caráter estático. . . . .	58
Figura 14 – Representação de um Breather, onde pode-se ver a forma desse sóliton. . . . .	59
Figura 15 – Representação topográfica de um Breather. . . . .	59
Figura 16 – <b>(a)</b> : Esquema de uma linha de transmissão contínua, sem perdas e aterrada. <b>(b)</b> : E esquema de seu circuito elétrico equivalente (REMOISSENET, 1999). . . . .	65
Figura 17 – Linha de transmissão elétrica dispersiva com uma indutância $l_2$ em paralelo com capacitor $c$ (REMOISSENET, 1999). . . . .	71
Figura 18 – Representação da relação de dispersão para $k > 0$ . . . . .	74
Figura 19 – Esquema de um pulso de onda que ao longo de sua propagação ocorre dispersão. . . . .	74
Figura 20 – Esquema de uma linha de transmissão elétrica discreta, [1]. . . . .	74

Figura 21 – Circuito elétrico não-linear equivalente a uma linha de transmissão com capacitância e indutância não-linear por unidade de comprimento $dx$ (REMOISSENET, 1999). . . . .	79
Figura 22 – Esquema de um circuito com indutância linear $l$ e capacitância não-linear $C(V_n)$ (REMOISSENET, 1999). . . . .	81

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela com a relação entre materiais supercondutores e suas respectivas temperaturas críticas (SEIDEL, 2015). . . . .	37
--	----



# Sumário

	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>I</b>	<b>SÓLITONS</b>	<b>15</b>
<b>1</b>	<b>FENÔMENOS ONDULATÓRIOS</b>	<b>17</b>
<b>1.1</b>	<b>Ondas unidimensionais</b>	<b>17</b>
1.1.1	Ondas progressivas	17
1.1.2	Ondas harmônicas	18
1.1.3	Equação de onda unidimensional	20
<b>1.2</b>	<b>Dispersão, dissipação e não-linearidade</b>	<b>21</b>
<b>2</b>	<b>SÓLITONS</b>	<b>25</b>
<b>2.1</b>	<b>Sóliton mecânico</b>	<b>25</b>
2.1.1	Amplitudes pequenas	26
2.1.2	Amplitudes grandes	27
2.1.3	Contração de Lorentz de um sóliton kink	30
2.1.4	Energia de um kink	32
<b>II</b>	<b>SUPERCONDUTIVIDADE</b>	<b>35</b>
<b>3</b>	<b>SUPERCONDUTIVIDADE</b>	<b>37</b>
<b>3.1</b>	<b>Junção Josephson</b>	<b>38</b>
3.1.1	Junção Josephson curta	38
3.1.2	Junção Josephson longa	41
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>45</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>47</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>49</b>
	<b>APÊNDICE A – OUTRAS SOLUÇÕES PARA A EQUAÇÃO DE SINE-GORDON</b>	<b>51</b>
<b>A.1</b>	<b>Solução sóliton kink</b>	<b>54</b>

A.2	Solução kink-kink . . . . .	55
A.3	Solução sólito breather . . . . .	56
	APÊNDICE B – CÁLCULO DE ENERGIA DE UM SÓLITON KINK	61
	APÊNDICE C – EQUAÇÕES BÁSICAS DE JOSEPHSON . . . . .	63
	APÊNDICE D – ONDAS LINEARES EM LINHAS DE TRANSMIS- SÃO ELÉTRICA . . . . .	65
D.1	Ondas lineares não-dispersivas . . . . .	65
	APÊNDICE E – ONDAS LINEARMENTE DISPERSIVAS . . . . .	71
E.1	Linhas de transmissão dispersiva . . . . .	71
E.2	Linhas de transmissão discreta . . . . .	74
	APÊNDICE F – ONDAS NÃO-LINEARES . . . . .	79
	APÊNDICE G – ONDAS EM UMA LINHA DISPERSIVA E NÃO- LINEAR . . . . .	81
	APÊNDICE H – EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO FLUXON . . . . .	83

# Introdução

As ondas do tipo sóliton foram descobertas experimentalmente por Scott Russel, em 1834 e reportada como ondas não-lineares. Os relatos de Russel contradizia com outros trabalhos da época que prediziam que ondas com amplitude finita não poderiam se propagar sem mudar de forma, tornando-se mais escarpadas e eventualmente quebrando. Em 1865, H. Bazin reportou experimentos que reforçavam e confirmavam as observações relatadas por Russel ([REMOISSENET, 1999](#)). Essa contradição foi logo resolvida, com os trabalhos independentes de Joseph Boussinesq (1871) e Lord Rayleigh (1876), que deram importantes contribuições ao mostrarem que se os efeitos dissipativos forem ignorados, o aumento local da velocidade associado com o aumento finito da amplitude é balanceado pelo decréscimo associado com a dispersão, levando a uma onda de forma constante.

Matematicamente sólitons são sistemas com soluções exatas; embora estes sistemas, chamados de sistemas integráveis sejam valiosos, são aproximações dos fenômenos físicos reais, pois inevitavelmente há outros efeitos em jogo tais como, defeitos, atrito e forças motrizes externas. De uma maneira qualitativa, ondas solitárias podem ser compreendidas como o equilíbrio entre efeitos dispersivos e não-lineares, com propriedade de partículas, pois as ondas solitárias conservam sua velocidade e forma mesmo depois de colidir com outras ondas solitárias.

No capítulo 1 apresentamos as principais características dos fenômenos ondulatórios fundamentais tais como: ondas progressivas, ondas harmônicas, equação de onda livre e os efeitos da dispersão, dissipação e não-linearidade na equação de onda.

No capítulo 2 exploramos uma linha de pêndulos acoplados por uma mola, cuja dinâmica é descrita pela equação de Sine-Gordon que possui soluções analíticas, que são sólitons. Examinamos alguns aspectos e propriedades dessas soluções.

No capítulo 3 veremos sobre a descoberta da supercondutividade e algumas de suas particularidades. Depois usaremos a proposta de Feynman sobre efeito Josephson e o que constitui uma junção Josephson e em seguida analisamos a propagação do fluxo magnético ao longo de uma junção. A dinâmica do fluxo magnético é descrito também pela equação de Sine-Gordon semelhante ao caso da linha mecânica e possui soluções analíticas, que são sólitons denominados aqui como **fluxons**.





Parte I

Sólitons



# 1 Fenômenos Ondulatórios

Uma onda é qualquer sinal que se transporta de um ponto a outro de um meio com velocidade definida, sem que haja transporte direto de matéria de um desses pontos ao outro (NUSSENZVEIG, 1983). Ondas transportam energia e momento linear pelo meio onde se propagam e os “corpos” envolvidos permanecem numa posição média. Existem diversos tipos de onda:

- **Ondas longitudinais** são as ondas onde a perturbação ocorre ao longo da direção da propagação. Um exemplo desse tipo de onda é o som que se propaga pelo ar.
- **Ondas transversais** são as ondas onde a perturbação se dá perpendicular à direção da propagação. As ondas eletromagnéticas ou um pulso numa corda são exemplos de ondas transversais.
- **Ondas sísmicas** são ondas que se propagam no interior da Terra, pois são constituídas de propagação tanto longitudinal quanto transversal e os dois tipos de onda se propagam com velocidades distintas.
- **Ondas na superfície da água** são ondas que não se classificam nem como transversal nem como longitudinal, pois as partículas na superfície descrevem trajetórias aproximadamente circulares, com componentes tanto na direção de propagação quanto como perpendiculares a ela.

## 1.1 Ondas unidimensionais

Iniciaremos o estudo das ondas pelo caso mais simples, em que o perfil da onda é inalterado e se propaga em uma única direção com velocidade  $v$ .

### 1.1.1 Ondas progressivas

Em uma corda esticada uma perturbação ou impulso, gera um pulso que se propaga ao longo da corda. Esse pulso pode ser descrito como uma onda transversal.

A perturbação é uma onda progressiva, que se move para direita, sem mudar de forma e com velocidade  $v$ , como se pode ver na Figura 1. Onde o referencial  $Oxy$  é o referencial que está parado observando o deslocamento do pulso, cujo perfil  $y(x, t)$ .  $O'x'y'$  é o referencial que se desloca junto ao pulso de perfil  $y'(x', t)$ .

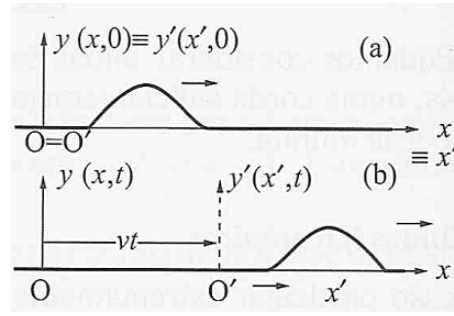


Figura 1 – Onda progressiva que se movimenta para direita, temos em **(a)**: o perfil da onda  $y(x, 0) = y'(x', 0)$  no instante  $t = 0$  e em **(b)**: o perfil da onda no instante  $t$  (NUSSENZVEIG, 2002).

O referencial inercial  $O'x'y'$  que coincide com o referencial inercial  $Oxy$  para  $t = 0$ , mas se move com a velocidade  $v$  da onda ao longo do eixo  $x$ . Isso significa que o referencial  $O'x'y'$  se move junto ao pulso, logo no decorrer do tempo, a onda descrita em termos desse referencial tem seu perfil não depende de  $t$ :

$$y'(x', t) = y'(x', 0) = y(x') = f(x'). \quad (1.1)$$

O referencial  $Ox'y'$  está afastado do referencial original por uma distância  $vt$  para qualquer instante  $t \neq 0$ , então podemos relacionar os dois referenciais da seguinte forma,  $x = x' + vt$  e como a propagação do eixo  $O'x'y'$  se dá apenas ao longo de  $Ox$  isso implica em  $y(x, t) = y'(x', t)$ . Então a onda no referencial original é:

$$y(x, t) = f(x') = f(x - vt). \quad (1.2)$$

A equação (1.2) descreve uma onda progressiva que se propaga para a direita, se a onda se movesse para a esquerda teríamos  $v \rightarrow -v$  então:

$$y(x, t) = g(x'') = g(x + vt) \quad (1.3)$$

No caso geral temos ondas progressivas se movendo em ambos os sentidos; então podemos escrever um expressão geral que represente o perfil da onda:

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (1.4)$$

### 1.1.2 Ondas harmônicas

Este é o caso em que uma perturbação em um ponto  $x$  corresponde a uma oscilação harmônica simples, o perfil da onda progressiva que se propaga para a direita com velocidade  $v$  é uma função senoidal:

$$f(x') = A \cos(kx' + \delta_0) = A \cos[k(x - vt) + \delta_0] \quad (1.5)$$

onde  $x' = x - vt$ ,  $A$  é a amplitude da onda,  $\delta = [k(x - vt) + \delta_0]$  é a fase da onda e  $\delta_0$  é a fase inicial da onda.

Como as funções que representam ondas harmônicas são periódicas tanto no tempo quanto no espaço, há relações que quantificam essa periodicidade, são elas:

- **Frequência angular** ( $\omega$ ) é o número de oscilações completas por unidade tempo e é medida em radianos por segundo  $[\frac{rad}{s}]$ ;
- **Período** ( $T$ ) é o tempo de uma oscilação completa e é medido em segundos  $[s]$ ;
- **Frequência** ( $\nu$ ) é o número de oscilações por unidade de tempo medida em hertz ( $Hz$ ) ou  $[s^{-1}]$ .
- **Número de onda angular** ( $k$ ) é o número de comprimentos de onda completas por unidade de comprimento é o análogo espacial para frequência angular ( $\omega$ ) e é medido em radianos por metro  $[\frac{rad}{m}]$ ;
- **Comprimento de onda** ( $\lambda$ ) é a distância entre duas fases de onda iguais e consecutivas e é medido em metros  $[m]$ .
- **Número de onda** ( $\sigma$ ) é o número de onda por unidade de comprimento e é medido em metros  $[m^{-1}]$ .

Uma onda  $f(x, t)$  que se desloca um comprimento igual a  $\lambda$ , por definição a onda terá o mesmo perfil que antes do deslocamento:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= f(x + \lambda, t) \\ A \cos[k(x - vt) + \delta_0] &= A \cos[k(x + \lambda - vt + \delta_0)] \\ \cos[k(x - vt)] &= \cos[k(x + \lambda - vt)] \\ k\lambda &= 2\pi \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned}$$

Analogamente temos que se passado um intervalo de tempo igual a um período ( $T$ ), então o perfil da onda será o mesmo que antes desse intervalo de tempo:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= f(x, t + T) \\ A \cos[k(x - vt) + \delta_0] &= A \cos[k(x - v(t + T) + \delta_0)] \\ \cos[k(x - vt)] &= \cos[k(x - v(t + T))] \\ kvT &= 2\pi \\ k &= \frac{2\pi}{vT} \end{aligned}$$

Portanto podemos relacionar por meio do **número de onda angular** ( $k$ ) as quantidades de periodicidade:

$$k = \frac{2\pi}{vT} \rightarrow v = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu, \text{ onde } v \text{ é a } \mathbf{velocidade de fase} \quad (1.6)$$

Então podemos reescrever a fase de uma onda harmônica em termos dessas quantidades:

$$[k(x - vt) + \delta_0] = (kx - \omega t + \delta_0) \quad (1.7)$$

### 1.1.3 Equação de onda unidimensional

Uma onda que se move para direita é expressa genericamente pela função  $y(x, t) = f(x')$ , onde  $x' = x - vt$ . Para associarmos uma equação do movimento com a propagação da onda, é necessário calcular a aceleração em um ponto qualquer  $x$ . A velocidade e a aceleração se obtêm fixando  $x$  e derivando  $y(x, t)$  com relação a  $t$ , ou seja, através de derivadas parciais. Então a velocidade com que o ponto  $x$  se desloca verticalmente no instante  $t$  é:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right) \left( \frac{\partial x'}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right) \frac{\partial(x - vt)}{\partial t} = -v \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right) \quad (1.8)$$

Derivando-se novamente em relação a  $t$ , obtemos a aceleração do ponto  $x$  no instante  $t$ :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -v \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = -v \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \right) \left( \frac{\partial x'}{\partial t} \right) = v^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \right) \quad (1.9)$$

Da mesma forma, só que fixando  $t$  e derivando  $y(x, t)$  em relação a  $x$ , obtemos:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right) \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right) \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \quad (1.10)$$

Derivando-se novamente em relação a  $x$ , obtemos:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \right) \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \quad (1.11)$$

Comparando as derivadas parciais de segunda ordem, tanto em relação a  $t$  quanto a  $x$  observa-se que ambas possuem o termo  $\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$  em comum, então obtemos:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1.12)$$

A equação (1.12) é chamada de **Equação de Onda Unidimensional**, uma das equações fundamentais da física.

A expressão de uma onda progressiva para direita  $f(x - vt)$  e para esquerda  $g(x + vt)$  são solução da Equação de Onda. Assim como a soma das duas soluções, formam uma outra solução,  $u(x, t)$ , conhecida como **Solução de D'Alembert**:

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (1.13)$$

## 1.2 Dispersão, dissipação e não-linearidade

Antes de abordar ondas com características como dispersão, não-linearidade ou dissipação, iremos antes fazer algumas considerações como forma de simplificar nossa abordagem. A primeira simplificação é usar a Equação de Onda na forma fatorada, a fim de facilitar encontrar a solução que a satisfaça, pois basta achar a solução para um dos fatores:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} \mp v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} \pm v \frac{\partial}{\partial x} \right) y = 0 \quad (1.14)$$

Logo basta encontrar a solução que satisfaça um dos termos da Equação de Onda livre na forma fatorada, isso facilita o estudo das equações. Outra simplificação é a introdução de uma notação simplificada para derivadas parciais:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y_x, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = y_t. \quad (1.15)$$

Para derivadas de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y_{xx}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = y_{tt}. \quad (1.16)$$

Escolhido um dos termos da equação de onda, este pode ser reescrito na forma simplificada,

$$\left( \frac{\partial y}{\partial t} \pm v \frac{\partial y}{\partial x} \right) = y_t \pm v y_x = 0. \quad (1.17)$$

Quando equações de onda são derivadas a partir de alguns princípios físicos (ou conjunto de equações genéricas), certas simplificações são necessárias ([DRAZIN P. G., 1996](#)). Partindo de premissas menos extremas, podemos obter equações com significados físicos, exemplo: onda de dissipação, dispersão ou não-linear.

Estudaremos agora o que a adição do termo  $y_{xxx}$ , provoca na função de onda livre e quais são suas propriedades, onde  $y = u(x, t)$  e  $v = 1$  para facilitar a abordagem, temos então:

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.18)$$

A função  $u(x, t)$  é solução da equação (1.18),  $u = e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$  e considerando apenas a parte real:  $u(x, t) = \cos(\phi)$  com  $\phi = (kx - \omega t)$ . Substituindo as derivadas parciais na equação de onda

$$\begin{aligned} u_t + u_x + u_{xxx} &= \frac{\partial e^{i\phi}}{\partial t} + \frac{\partial e^{i\phi}}{\partial x} + \frac{\partial^3 e^{i\phi}}{\partial x^3} = 0 \\ -\omega + k - k^3 &= 0 \\ \omega(k) &= k - k^3 \\ v(k) &= 1 - k^2. \end{aligned}$$

A expressão  $\omega(k) = k - k^3$  é a **relação de dispersão**, mostra que ondas de diferentes número de onda propagam-se em velocidade distintas. O efeito geral disso é a mudança do

perfil da onda durante sua propagação, então o termo  $u_{xxx}$ , gera efeito de dispersão. A equação (1.18) é a **equação de onda dispersiva**.

Agora o que ocorre se adicionarmos o termo  $(-u_{xx})$ , sendo  $u(x, t) = \cos(\phi)$  solução da equação:

$$u_t + u_x - u_{xx} = \frac{\partial e^{i\phi}}{\partial t} + \frac{\partial e^{i\phi}}{\partial x} + \frac{\partial^2 e^{i\phi}}{\partial x^2} = 0 \quad (1.19)$$

$$ie^{i\phi}(-\omega + k + ik^2) = 0 \quad (1.20)$$

$$\omega(k) = k(1 - ik) \quad (1.21)$$

Substituindo o valor de  $\omega$  na equação de onda, tem-se seu perfil com a adição do termo  $(-u_{xx})$ :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{i(kx - \omega t)} \\ u(x, t) &= e^{ik[x - (1 - ik)t]} \\ u(x, t) &= e^{[ik(x - t)]} e^{(i^2 k^2 t)} \\ u(x, t) &= e^{(kx - \omega t)} \underbrace{e^{-(k^2 t)}}_A \\ u(x, t) &= Ae^{(kx - \omega t)} \end{aligned}$$

Encontramos como solução para equação de onda  $u_t + u_x - u_{xx}$  uma onda que viaja com velocidade individual, mas que sua amplitude  $A$  decresce exponencialmente quando  $t \rightarrow \infty$ . Esse decaimento exibido na solução é denominado em geral de **dissipação** e se deu a partir do termo  $(-u_{xx})$ .

A maioria das equações de ondas, como a equação (1.14) são válidas para pequenas amplitudes (DRAZIN P. G., 1996). Se assim for poderemos obter (com boa aproximação) a equação diferencial não-linear:

$$u_t + \underbrace{(1 + u)}_v u_x = 0. \quad (1.22)$$

Onde  $v = (1 + u)$ , isso significa que cada amplitude dessa onda está relacionada com uma velocidade, quanto maior a amplitude maior a velocidade. Portanto a parte superior de uma onda não-linear tem maior velocidade que a sua base, podemos observar isso nas ondas do mar que ao se aproximarem da praia "quebram", pois a crista (com maior velocidade) se adianta em relação a "base da onda" causando essa descontinuidade.

Caso as funções  $f(x, t)$  e  $g(x, t)$  sejam solução da **equação de onda não-linear** então a soma das soluções não é solução dela, ou seja,



Se  $f(x, t)$  e  $g(x, t)$  são soluções da equação **equação de onda não-linear**, isso implica em:

$$f_t + (1 + f)f_x = 0 \text{ e } g_t + (1 + g)g_x = 0. \quad (1.23)$$

Mas a superposição não é solução, pois:

$$\begin{aligned} (f + g)_t + (1 + f + g)(f + g)_x &= 0 \\ f_t + g_t + (1 + f)f_x + (1 + f)g_x + gf_x + gg_x &= 0 \\ fg_x + gf_x &= 0 \end{aligned}$$

Portando podemos concluir que a equação de onda não-linear não respeita o **Princípio da Superposição**.



## 2 Sólitons

Introduzir a respeito de solitons

### 2.1 Sóliton mecânico

Num sistema de  $n$  pêndulos acoplados por uma mola ao longo de um eixo  $Ox$  como mostrado na Figura 2, separados por uma distância  $a$  há uma de espira de mola com torque constante  $\beta$ . Um pêndulo que é rotacionado de sua posição de repouso causa uma perturbação em todo o sistema mecânico, logo se faz necessário associar um ângulo  $\theta_n$  a cada  $n$ -ésimo pêndulo rotacionado.

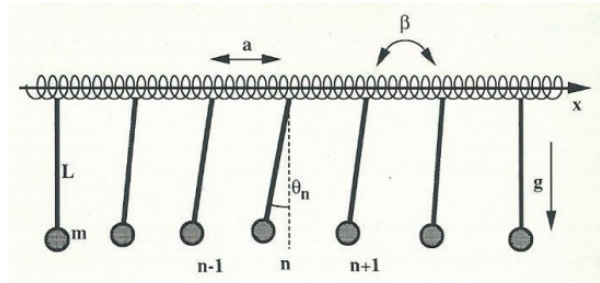


Figura 2 – Esquema de uma linha de transmissão que consiste em pêndulos acoplados por uma mola (REMOISSENET, 1999).

Todos os pêndulos possuem comprimento  $L$  e massa  $m$ . Um pêndulo que é rotacionado um ângulo  $\theta_n$ , sofre um torque devido a gravidade ( $\Gamma_g$ ) e outro torque devido ao acoplamento ( $\Gamma_c$ ). A ação dos torques sobre um pêndulo  $n$ -ésimo do qual possui momento de inércia ( $I$ ), sofre uma aceleração angular ( $\alpha$ ) e por conservação de energia podemos escrever uma relação entre eles:

$$I \frac{d^2 \theta_n}{dt^2} = \underbrace{-mgL \sin(\theta_n)}_{\Gamma_g} - \underbrace{\beta(\theta_n - \theta_{n+1}) - \beta(\theta_n - \theta_{n-1})}_{\Gamma_c} \quad (2.1)$$

$$\underbrace{\frac{d^2 \theta_n}{dt^2}}_{\theta_{tt}} = (-1) \left( \frac{mgL}{I} \right) \sin(\theta_n) + \frac{\beta}{I} (2\theta_n - \theta_{n+1} - \theta_{n-1}) \quad (2.2)$$

As grandezas, frequência ( $\omega_o$ ) e velocidade ( $c_o$ ) são definidas como:

$$\omega_o^2 = \frac{mgL}{I}, \quad c_o^2 = \frac{a^2 \beta}{I} \quad (2.3)$$

Então podemos reescrever a equação da seguinte maneira:

$$\theta_{tt} = (-1) \omega_o^2 \sin(\theta_n) + \frac{c_o^2}{a^2} (2\theta_n - \theta_{n+1} - \theta_{n-1}) \quad (n+1, 2, \dots, N). \quad (2.4)$$

Este é um sistema de  $N$  equações diferenciais não-linear denominada: **Equação de Sine-Gordon (SGE)**. Este sistema discreto não possui solução analítica, sendo então utilizado uma aproximação para tornar o sistema de discreto para contínuo. Usando a Série de Taylor podemos desenvolver um ponto discreto como uma soma de variáveis contínuas:

$$\theta_n(t) \rightarrow \theta(x, t), \quad \theta(n \pm 1) = \theta \pm \frac{a}{1!} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \pm \frac{a^3}{3!} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + \dots \quad (2.5)$$

Esta aproximação é válida para variações lentas de  $\theta_n$  para  $\theta_{n+1}$ , para o caso que a amplitude do torque restaurador causado pelo acoplamento é maior que o torque "gravitacional", isso implica em:

$$\beta \gg mgL \quad \text{ou} \quad \frac{c_o^2}{a^2} \gg \omega_o^2 \quad (2.6)$$

$$\frac{c_o^2}{\omega_o^2} \gg a^2 \rightarrow \frac{c_o}{\omega_o} \gg a \quad (2.7)$$

Introduzimos o parâmetro discreto  $d = c_o/\omega_o$  e caso a variação do ângulo de rotação for abrupta  $d \approx a$  a aproximação usando a Série de Taylor não poderá ser utilizada. Considerando então que  $d \gg a$ , podemos reescrever a equação de Sine-Gordon:

$$\theta_{tt} = (-1)\omega_o^2 \text{sen}(\theta_n) + \frac{c_o^2}{a^2} \left[ (\theta + a\theta_x + \frac{a^2\theta_{xx}}{2!} + \dots) + (\theta - a\theta_x + \frac{a^2\theta_{xx}}{2!} + \dots) - 2\theta \right] \quad (2.8)$$

$$\theta_{tt} + \omega_o^2 \text{sen}(\theta) = \frac{c_o^2}{a^2} \left( \frac{a^2\theta_{xx}}{2!} + \frac{a^4\theta_{xxxx}}{4!} + \dots \right) \quad (2.9)$$

Como são variações lentas de  $\theta$  podemos assumir a aproximação da equação da seguinte forma:

$$\theta_{tt} - \underbrace{\frac{c_o^2}{v^2}}_{v^2} \theta_{xx} + \omega_o^2 \text{sen}(\theta) = 0 \quad (2.10)$$

A equação (2.10) é a Equação de Sine-Gordon contínua. Nela está embutida não-linearidade e dispersão, esta equação possui solução analítica.

### 2.1.1 Amplitudes pequenas

O caso de amplitudes pequenas é quando a variação de  $\theta$  é muito pequena, em que podemos reduzir  $\text{sen}(\theta) \approx \theta$ , o que leva a uma aproximação linear da equação (2.10)

$$\theta_{tt} - c_o^2 \theta_{xx} + \omega_o^2 \theta = 0 \quad (2.11)$$

esta equação é denominada **Equação Klein-Gordon**, uma equação de onda dispersiva. Como analisamos anteriormente, ondas dispersivas admitem solução na forma:

$$\theta = \theta_o \cos(\phi) = \theta_o \cos(kx - \omega t) \quad (2.12)$$

Obtendo a segunda derivada de (2.12) em relação a  $x$  e a  $t$ :

$$\begin{aligned} \theta_{tt} &= -\theta_o \cos(\phi) \omega^2 = -\omega^2 \theta \\ \theta_{xx} &= -\theta_o \cos(\phi) k^2 = -k^2 \theta. \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação Klein-Gordon com as respectivas derivadas da solução:

$$\begin{aligned}
 \theta_{tt} - c_o^2 \theta_{xx} + \omega_o^2 \theta &= 0 \\
 -\omega^2 \theta - c_o^2 (-k^2 \theta) + \omega_o^2 \theta &= 0 \\
 (c_o^2 k^2 + \omega_o^2) \theta &= \omega^2 \theta. \\
 \omega &= \sqrt{(c_o^2 k^2 + \omega_o^2)} \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

obtemos a relação de dispersão representada na Figura (3.6), para um  $k > 0$  como se pode observar na representação. Caso  $k = 0$  isso implica em  $\omega = \omega_o$ , essa seria a chamada frequência de corte - onde acima dessa frequência há propagação.

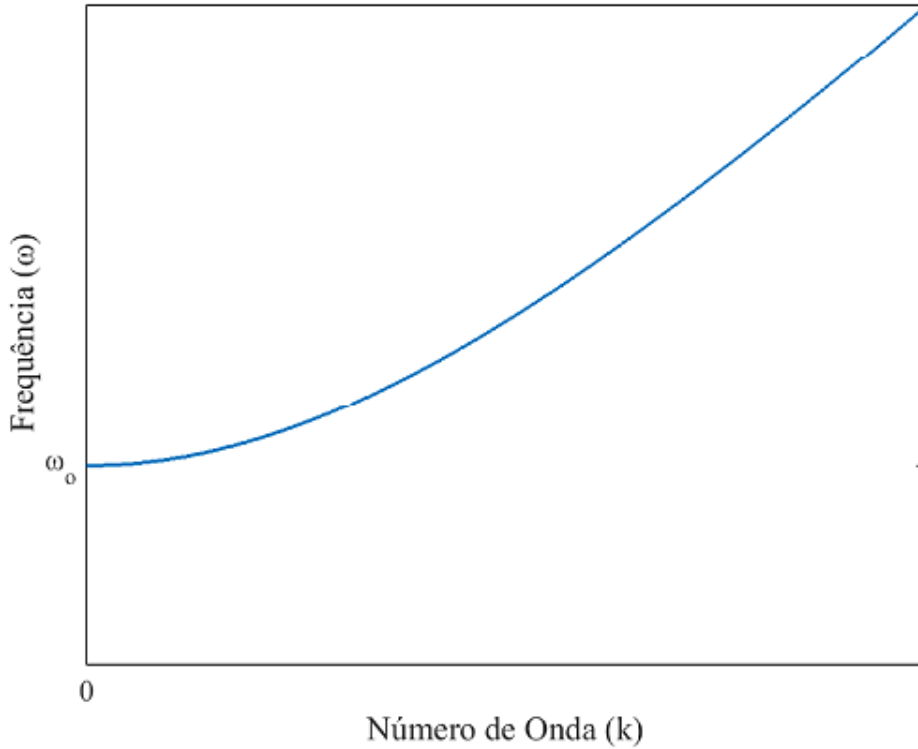


Figura 3 – Representação da relação de dispersão para  $k > 0$ .

### 2.1.2 Amplitudes grandes

A equação de Sine-Gordon não possui soluções restritas aos casos de amplitudes pequenas, também é possível encontrar soluções para maiores variações do ângulo de rotação. Retomando a equação de Sine-Gordon:

$$\theta_{tt} - c_o^2 \theta_{xx} + \omega_o^2 \text{sen } \theta = 0 \tag{2.14}$$

substituindo as variáveis:  $\omega_o t = T$  e  $\frac{\omega_o}{c_o} x = X$ , como forma de simplificar a nossa abordagem

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \text{sen } \theta = 0 \tag{2.15}$$

onde observamos uma onda de perfil permanente de forma:

$$\theta = \theta(s) = \theta(X - uT). \quad (2.16)$$

Para acharmos a solução dessa equação iremos escrever uma expressão para derivada de  $\theta$  em relação as variáveis  $T$ ,  $X$  e  $s$ :

$$\begin{aligned} d\theta &= \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) dX + \left( \frac{\partial \theta}{\partial T} \right) dT \\ d\theta &= \frac{d\theta}{ds} \underbrace{\left( \frac{\partial s}{\partial X} \right)}_1 + \frac{d\theta}{ds} \underbrace{\left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)}_{-u} \\ d\theta &= \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) dX - u \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) dT. \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação (2.15):

$$u^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + \text{sen } \theta = 0 \quad (2.17)$$

$$\text{sen}(\theta) = (1 - u^2) \frac{d^2 \theta}{ds^2} \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} = \frac{\text{sen } \theta}{(1 - u^2)} \quad (2.19)$$

Como:

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 \quad e \quad \frac{\text{sen } \theta}{(1 - u^2)} = -\frac{d \cos \theta}{d\theta}. \quad (2.20)$$

Pode-se reescrever a equação da seguinte maneira:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \frac{d - \cos(\theta)}{ds (1 - u^2)} \quad (2.21)$$

Integrando ambos os lados:

$$\int \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \int \frac{d - \cos(\theta)}{ds (1 - u^2)} \quad (2.22)$$

$$\left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \frac{2(C - \cos(\theta))}{(1 - u^2)} \quad (2.23)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm \sqrt{\frac{2(C - \cos(\theta))}{(1 - u^2)}} \quad (2.24)$$

onde  $C$  é uma constante de integração. Fazendo  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta = 0$ , o que implica em  $\frac{d\theta}{ds} \rightarrow 0$ , quando  $s \rightarrow \pm\infty$ . Então podemos achar o valor de  $C$ :

$$0 = \pm \sqrt{\frac{2(C - \cos(0))}{(1 - u^2)}} \quad (2.25)$$

$$\pm(2C - 2) = 0 \rightarrow C = 1 \quad (2.26)$$

Com  $C=1$ , retomamos a equação (2.24)

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm \sqrt{\frac{2(1 - \cos(\theta))}{(1 - u^2)}} \quad (2.27)$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}} = \pm \frac{ds}{(1 - u^2)} \quad (2.28)$$

$$\int_{\theta(s_o)}^{\theta(s_f)} \frac{d\theta}{\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}} = \pm \int_{\theta(s_o)}^{\theta(s_f)} \frac{ds}{(1 - u^2)} \quad (2.29)$$

$$\pm \frac{(s_f - s_o)}{\sqrt{(1 - u^2)}} = \ln \left[ \tan \left( \frac{\theta}{4} \right) \right] \quad (2.30)$$

$$\theta = 4 \arctan \left[ \exp \left( \frac{\pm s_f - s_o}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \right] \quad (2.31)$$

A equação (2.31) é solução da equação de Sine-Gordon para grandes amplitudes. Representa uma onda solitária localizada, isto é, onda que não sofre difração, viaja com velocidade normalizada ( $-1 < u < 1$ ). Colisões feitas por simulações numérica indicam que esta onda é do tipo sóliton. Existem outras soluções para a equação de Sine-Gordon que são detalhadas no Apêndice A.

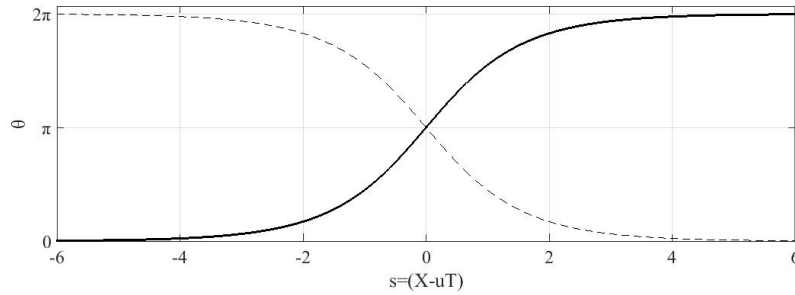


Figura 4 – Representação de um sóliton kink e antikink, em linha contínua e pontilhada respectivamente.

O sinal  $\pm$  da solução indica a direção de propagação da onda, no caso dos pêndulos, o sinal positivo indica uma rotação no sentido anti-horário, isto é, de 0 a  $2\pi$ , chamamos esse sóliton de **kink**. O sinal negativo indica uma rotação no sentido horário, isto é, de 0 a  $-2\pi$ , esse sóliton se chama **anti-kink**. Na Figura (4) está representado um sóliton kink e anti-kink.

Definindo  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$  e fazendo  $s_o = 0$ , a solução (2.31) pode ser reescrita como:

$$\theta = 4\arctan[\exp(\pm\gamma s_f)] = 4\arctan[\exp(\pm\gamma(X - uT))] \quad (2.32)$$

O gradiente de rotação é dado pela derivada parcial de  $\theta$  em relação a variável  $X$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial X} &= 4 \left( \frac{\partial\arctan[\exp(\pm\gamma s_f)]}{\partial X} \right) \left( \frac{\partial\exp(\pm\gamma s_f)}{\partial X} \right) \\ \frac{\partial\theta}{\partial X} &= \frac{\gamma\exp(\pm\gamma s)}{1 + (\exp \pm 2\gamma s)} \underbrace{\frac{\partial s}{\partial X}}_1 \\ \frac{\partial\theta}{\partial X} &= 2\gamma\text{sech}(\gamma s) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Já o cálculo da derivada parcial de  $\theta$  em relação a  $T$ , nos dá a velocidade de rotação:

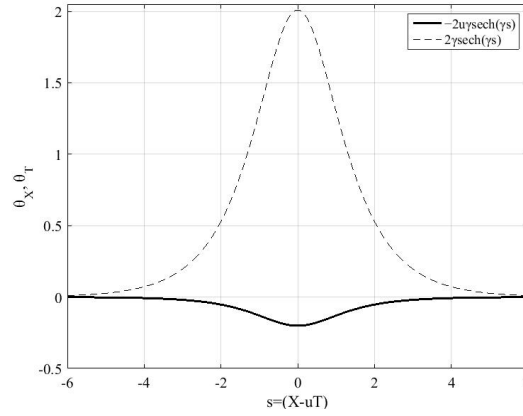


Figura 5 – Representação do gradiente e velocidade de rotação em função de  $s = X - uT$  com  $u = 0.1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial T} &= 4 \left( \frac{\partial\arctan[\exp(\pm\gamma s_f)]}{\partial T} \right) \left( \frac{\partial\exp(\pm\gamma s_f)}{\partial T} \right) \\ \frac{\partial\theta}{\partial T} &= \frac{\gamma\exp(\pm\gamma s)}{1 + (\exp \pm 2\gamma s)} \underbrace{\frac{\partial s}{\partial T}}_{-u} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial T} = -2u\gamma\text{sech}(\gamma s) \quad (2.34)$$

Na figura (5) estão representadas as derivadas em  $X$  e em  $T$  de um sóliton kink, na representação é possível ver a forma desses pulsos localizados.

### 2.1.3 Contração de Lorentz de um sóliton kink

Conforme a velocidade de um sóliton kink aumenta, a sua largura fica mais estreita devido ao fator de contração de Lorentz ( $\gamma$ ) no denominador do expoente. Esta conclusão



parte da equação de Sine-Gordon na forma como escrita em (2.15), se novamente for feita uma transformação de Lorentz das variáveis independentes da seguinte forma  $(X, T)$  para  $(X', T')$ , sendo  $X' = \gamma(X - uT)$  e  $T' = \gamma(T - uX)$ :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \text{sen}(\theta) \rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial T'^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial X'^2} + \text{sen}(\theta) = 0 \quad (2.35)$$

$$\theta = \theta(s) = \theta(X - uT) \rightarrow \theta(s) = \theta(X' - uT') \quad (2.36)$$

Para acharmos a solução dessa equação iremos escrever uma expressão para derivada de  $\theta$  em relação as variáveis  $T'$ ,  $X'$  e  $s$ , como feito para as variáveis  $X$  e  $T$ :

$$d\theta = \left( \frac{\partial \theta}{\partial X'} \right) dX' + \left( \frac{\partial \theta}{\partial T'} \right) dT' \quad (2.37)$$

$$d\theta = \frac{d\theta}{ds} \underbrace{\left( \frac{\partial s}{\partial X'} \right)}_{\gamma} + \frac{d\theta}{ds} \underbrace{\left( \frac{\partial s}{\partial T'} \right)}_{-u\gamma} \quad (2.38)$$

$$d\theta = \gamma \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) dX - u \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) dT \right] \quad (2.39)$$

O que observamos é que feita a transformação de Lorentz as derivadas de segunda ordem recaem na mesma expressão quando em termos de  $X$  e  $T$ . Com isso concluímos que a solução obtida em (2.31) também é solução quando feita a transformação de Lorentz.

Então se tomarmos a solução na forma de um sóliton kink em termos de  $(x, t)$ :

$$\theta = 4\arctan \left[ \exp \left( \pm \frac{\frac{\omega_o}{c_o} x - u\omega_o t}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \right] \quad (2.40)$$

Definindo  $v = uc_o$ , que é a velocidade do sóliton e introduzindo o parâmetro discreto  $d = c_o/\omega_o$  já definido anteriormente, então podemos transformar a solução em

$$\theta = 4\arctan \left\{ \exp \left[ \pm \frac{\left( \frac{\omega_o}{c_o} \right) (x - \overbrace{uc_o}^v t)}{\sqrt{1 - u^2}} \right] \right\} \quad (2.41)$$

$$\theta = 4\arctan \left\{ \exp \left[ \pm \frac{(x - vt)}{d\sqrt{1 - u^2}} \right] \right\} \quad (2.42)$$

$$\theta = 4\arctan \left\{ \exp \left[ \pm \frac{(x - vt)}{d\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_o^2}}} \right] \right\} \quad (2.43)$$

Como mencionado, devido ao fator de contração de Lorentz um sóliton que se movimenta com velocidade maior faz com que a largura da onda diminua, como pode ser visto na Figura (5). Essa característica pode ser vista em (2.43), onde  $v$ , a velocidade do sóliton é limitada pelo valor  $c_o$ , que é a velocidade de propagação de onda linear, conforme  $v$  aumenta mais o pulso se aproxima de uma função degrau.

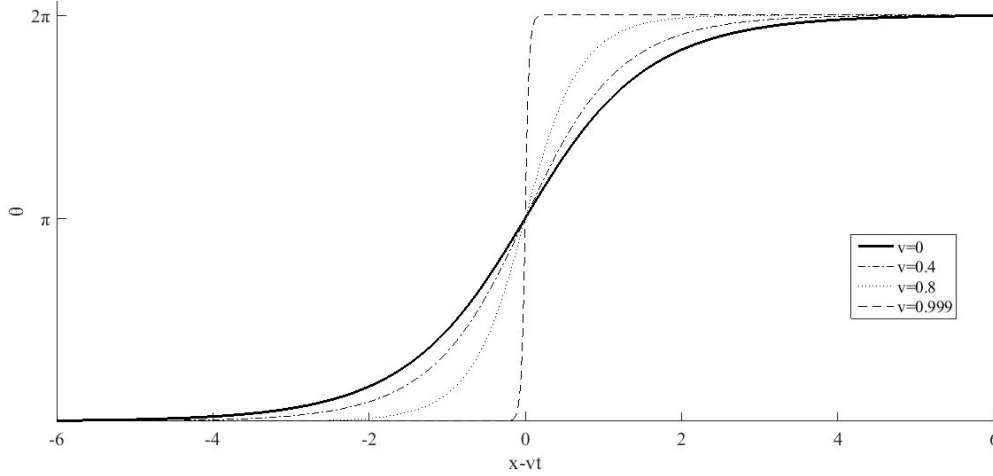


Figura 6 – Representação da mudança de perfil de um kink devido a contração de Lorentz para diferentes velocidades  $v$ .

Uma característica importante dos sólitons kinks é que sua amplitude independe de sua velocidade, facilmente demonstrável se fizermos  $v = 0$  reduzimos a equação (2.43) para

$$\theta = 4 \arctan \left[ \exp \left( \pm \frac{x}{d} \right) \right]. \quad (2.44)$$

Concluimos então que um sóliton kink pode ser estático, perdendo sua característica de onda.

#### 2.1.4 Energia de um kink

Para calcular a energia total ( $E$ ) de um sóliton kink, de uma cadeia de pêndulo acoplados sem levar e conta efeitos dissipativos, é a soma da energia cinética rotacional, da energia potencial devido ao acoplamento dos pêndulos e a gravitação. A expressão que descreve isso é

$$E = \sum_{n=1}^N \left[ \frac{1}{2} I \left( \frac{d\theta_n}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \beta (\theta_{n+1} - \theta_n)^2 + mgL(1 - \cos\theta_n) \right] \quad (2.45)$$

Essa soma discreta, pode ser aproximada em uma caso contínuo se fizermos as seguintes considerações, a variação do ângulo de rotação entre dois pêndulos consecutivos seria  $\left| \frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{a} \right|$ , portanto poderíamos aproximar essa variação por  $\left| \frac{\partial\theta}{\partial x} \right|$  e a soma pensada como uma integral

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} I \left( \frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \beta a^2 \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + mgL(1 - \cos\theta) \right] \frac{dx}{a} \quad (2.46)$$

com  $\beta = \frac{Ic_o^2}{a^2}$  e  $mgL = I\omega_o^2$ , reorganizando os termos, temos:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} I \left( \frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{Ic_o^2}{a^2} a^2 \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + I\omega_o^2(1 - \cos\theta) \right] \frac{dx}{a} \quad (2.47)$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} I \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} I c_o^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + I \omega_o^2 (1 - \cos \theta) \right] \frac{dx}{a} \quad (2.48)$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I}{a} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} c_o^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \omega_o^2 (1 - \cos \theta) \right] dx. \quad (2.49)$$

Fazendo uma mudança de variável em termos de  $X$  e  $T$ , já definidos anteriormente, reescrevendo a expressão da energia total:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I}{a} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial T} \right)^2 \omega_o^2 + \frac{1}{2} c_o^2 \frac{\omega_o^2}{c_o^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + \omega_o^2 (1 - \cos \theta) \right] dX \frac{c_o}{\omega_o}. \quad (2.50)$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I \omega_o c_o}{a} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial T} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + (1 - \cos \theta) \right] dX. \quad (2.51)$$

o termo  $I \omega_o c_o$  é a energia escalar do sistema que podemos verificar por análise dimensional:

$$[I \omega_o c_o] = \underbrace{[kg \cdot m]}_I \cdot \underbrace{[s^{-1}]}_{\omega_o} \cdot \underbrace{[m \cdot s^{-1}]}_{c_o} = [kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}] = [J] \quad (2.52)$$

como pode se ver o termo  $I \omega_o c_o$  possui dimensão de energia.

Para resolvermos essa integral (calculadas no Apêndice B) que representa a energia total do sistema, iremos separá-la em partes:

- $E_1$ , é a energia cinética rotacional:

$$E_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial T} \right)^2 dX \quad (2.53)$$

$$E_1 = 4u^2 \gamma \quad (2.54)$$

- $E_2$ , é a energia potencial devido ao acoplamento dos pêndulos:

$$E_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 dX \quad (2.55)$$

$$E_2 = 4\gamma \quad (2.56)$$

- $E_3$ , é a energia potencial devido a gravidade:

$$E_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos \theta) dX \quad (2.57)$$

$$E_3 = \frac{4}{\gamma} \quad (2.58)$$

Finalmente podemos retomar a equação (2.51) e substituir os resultados de cada termo da integral:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I\omega_o c_o}{a} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial T} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + (1 - \cos \theta) \right] dX \quad (2.59)$$

$$E = \frac{I\omega_o c_o}{a} (E_1 + E_2 + E_3) \quad (2.60)$$

$$E = \frac{I\omega_o c_o}{a} (4u^2 \gamma + 4\gamma + \frac{4}{\gamma}) \quad (2.61)$$

$$E = \frac{4I\gamma\omega_o c_o}{a} (u^2 + 1 + \frac{1}{\gamma^2}) \quad (2.62)$$

$$E = \frac{8I\gamma\omega_o c_o}{a} \quad (2.63)$$

Lembrando que

$$\gamma = \left( \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c_0^2}}} \right) \quad (2.64)$$

$$E = \frac{8\gamma\omega_o c_o}{a} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c_0^2}}} \right) \quad (2.65)$$

Por comparação com a energia cinética relativística

$$E = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.66)$$

concluimos que a massa de um kink ( $m_o$ ) é

$$m_o = \frac{8I\omega_o}{ac_o} \quad (2.67)$$

portanto a energia de um sólon kink ( $E_K$ ) pode ser simplificada assim:

$$E_K = \frac{m_o c_o^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.68)$$

E a energia de sólon estático ( $E_E$ ), isto é, quando  $v = 0$

$$E_E = m_o c_o^2 \quad (2.69)$$

Um sólon kink pode ser considerado assim uma partícula relativística de energia  $E_K$  e massa  $m_o$ , essa natureza corpuscular dos sólitons é verificada experimentalmente (REMOISSENET, 1999).

## Parte II

### Supercondutividade



### 3 Supercondutividade

Em 1908, H. Karmeligh-Onnes encontrou uma forma de liquefazer o hélio e assim atingir temperaturas da ordem de  $4K$ . Por volta de 1911, ao investigar a relação da resistência elétrica em função da temperatura do mercúrio (Hg), descobriu que a  $4K$  a resistência elétrica decaía a zero subitamente e assim permanece a temperaturas inferiores. Depois dessa descoberta o mesmo comportamento foi visto em outros metais e ligas metálicas como: estanho, chumbo, alumínio, nióbio entre outros (SCHMIDT, 1997). A temperatura de transição entre o estado normal e supercondutor é chamada de temperatura crítica  $T_c$ . Pouco depois observou-se que a supercondutividade pode ser anulada não só pelo aquecimento do material, mas também pela aplicação de um campo magnético. Esse campo chamado de campo crítico,  $H_c$ .

Em 1986 J. George Bednorz e Karl Müller que trabalhavam no laboratório da IBM, em Zurique, Suíça, reportaram supercondutividade em óxidos de lantânio e cobre dopados com bário ou estrôncio em temperaturas acima de  $38K$ . Isso animou a comunidade científica pois a temperatura crítica do material descoberto estava bem acima quando comparada com a dos metais e ligas metálicas (SHEAHEN, 2002). Centenas de cientistas começaram então a tentar diversas combinações químicas na tentativa de encontrar materiais com altas temperaturas crítica, em sua maioria cerâmicas, a base de óxidos de cobre, como o  $YBa_2Cu_3O_7$  (ou YBCO) que se mantém supercondutor a  $92K$ , uma temperatura alta comparada com os metais como podemos verificar na Tabela 1. Podendo assim o YBCO ser resfriado a partir de outras fontes como nitrogênio que se torna líquido a  $77K$ , barateando o custo do resfriamento quando comparado com o uso de hélio líquido e viabilizando a sua aplicação.

Tabela 1 – Tabela com a relação entre materiais supercondutores e suas respectivas temperaturas críticas (SEIDEL, 2015).

Material	Tc(K)
<i>Pb</i>	7,2
<i>Nb</i>	9,2
<i>NbN</i>	13-16
<i>Nb<sub>3</sub>Ge</i>	18
<i>NbTi</i>	9,6
<i>YBa<sub>2</sub>Cu<sub>2</sub>O<sub>7</sub></i>	92
<i>Bi<sub>2</sub>Sr<sub>2</sub>CaCu<sub>2</sub>O<sub>8</sub></i>	94
<i>Bi<sub>2</sub>Sr<sub>2</sub>Ca<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>10</sub></i>	110
<i>MgB<sub>2</sub></i>	40

Como vimos diversos metais apresentam a propriedade supercondutora quando resfriados

o suficiente conduzem eletricidade sem resistência, a explicação é que há uma interação entre elétrons devido a quase nenhuma vibração de rede, fazendo que os elétrons formem pares fracamente ligados (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 1963).

Sabe-se que um elétron é uma partícula de Fermi (ou Férmion), isto é, obedece o Princípio da Exclusão, mas o par se comporta como uma partícula de Bose (ou Bóson). Os bósons podem coexistir no mesmo estado quântico, ou seja, não obedecem o Princípio de Exclusão, que foi estabelecido por Pauli, em 1925: **Em um átomo multieletrônico nunca pode haver mais de um elétron ocupando o mesmo estado quântico** (EISBERG, 1994).

A energia do pareamento - isto é, de atração - é muito fraca, um aumento pequeno de temperatura é suficiente para separar os elétrons devido a agitação térmica, convertendo os elétrons para o estado “normal”. A ideia fundamental da supercondutividade exposta na teoria de Bardeen, Cooper e Schrieffer, ou, como é frequentemente denominada, Teoria BCS é que os elétrons trabalham em pares e podemos pensar que eles se comportam, mais ou menos, como partículas. E sendo assim podemos pensar em função de onda para partículas e isso se aplica aos pares de elétrons.

Aqui iremos considerar que estamos muito próximos do zero absoluto então todos os elétrons livres formam pares, quando há uma porção deles em um determinado estado podemos escrever função de onda como

$$\Psi(r) = \sqrt{\rho} e^{i\phi} \quad (3.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade de pares de Cooper por unidade de área e  $\phi$  é a fase quântica comum a todos os pares (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 1963).

## 3.1 Junção Josephson

Quando dois supercondutores são unidos por um filme fino de um dielétrico, esse arranjo é chamado de **Junção Josephson**, como se vê na Fig.7. Se o isolante for suficientemente espesso, não haverá corrente ao aplicarmos uma tensão entre os supercondutores. Caso o filme fino tenha espessura da ordem de  $100\text{\AA}$  elétrons livres possuem probabilidade de penetrar a barreira potencial, agora se a espessura do dielétrico for abaixo da ordem  $30\text{\AA}$  os pares de elétrons (ou pares de Cooper) possuem probabilidade de fluir através da junção e gerar condutividade ôhmica (REMOISSENET, 1999). Este efeito de tunelamento quântico denomina-se **efeito Josephson**.

### 3.1.1 Junção Josephson curta

Usando a explicação teórica de Feynman e descrevendo os pares de Cooper por uma única função de onda na forma (3.1), a amplitude de encontrar um par nos supercondutores



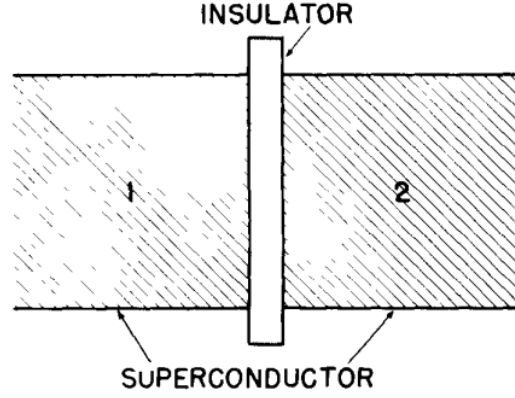


Figura 7 – Esquema de uma junção Josephson (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 1963).

$S_1$  e  $S_2$  é  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  respectivamente, e se relacionam da seguinte maneira através da equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = E_1 \Psi_1 - K \Psi_2, \quad i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = E_2 \Psi_2 - K \Psi_1 \quad (3.2)$$

onde  $\hbar = h/2\pi$ ,  $\hbar$  é a constante de Plack,  $K$  descreve o acoplamento dos supercondutores devido ao efeito túnel na junção e  $E_1$  e  $E_2$  são as energias dos pares nos supercondutores. Se uma diferença de potencial  $V$  é aplicada entre os supercondutores, como se vê na Fig.8.a, para o primeiro supercondutor é aplicado uma tensão  $-V/2$  e para o segundo uma tensão  $V/2$ , então a energia de dos pares no primeiro e no segundo supercondutor é respectivamente,  $E_1$  e  $E_2$ :

$$E_1 = q \left( \frac{-V}{2} \right) = -2e \left( \frac{-V}{2} \right) = +eV \quad (3.3)$$

$$E_2 = q \left( \frac{V}{2} \right) = -2e \left( \frac{V}{2} \right) = -eV \quad (3.4)$$

onde  $q = 2e$  é a carga de um par de Cooper. A diferença de energia entre os supercondutores é  $E_1 - E_2 = 2eV$ .

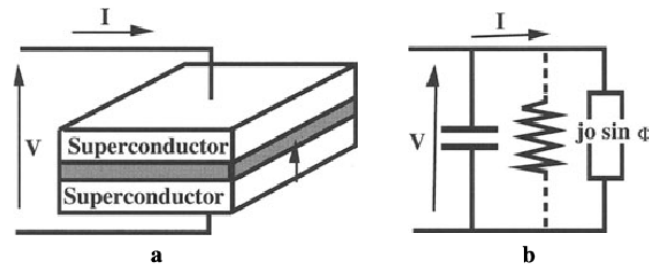


Figura 8 – Em **a**, esquema de uma junção Josephson pequena e em **b**, o circuito equivalente a junção pequena, a resistência equivale aos efeitos dissipativos aqui são ignorados (REMOISSENET, 1999).

Através das equações em (3.2) podemos calcular as equações básicas de Josephson, como detalha o Apêndice C, que descrevem os efeitos da corrente supercondutora  $J_B$  que flui

através do isolante, com amplitude  $J_C$  e frequência  $f$ :

$$J_B = 4eK \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\hbar} \sin \phi = J_C \sin \phi \quad (3.5)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar} = 2\pi f \quad (3.6)$$

sendo  $\phi$  a diferença de fase entre as funções de onda nos supercondutores.

Uma junção Josephson curta é equivalente a um circuito elétrico, como ilustra a Fig.8.b, é constituído de uma indutância não-linear em paralelo com uma capacitância e resistência elétrica, que representa os efeitos dissipativos que aqui ignoraremos. O fluxo magnético pela lei de Faraday é definido como:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = V, \quad (3.7)$$

combinando as equações 3.6 e 3.7 nós obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar} V \quad (3.8)$$

integrando ambos os lados a uma constante igual a zero, temos:

$$\phi = \frac{4\pi e}{h} \Phi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_o} \quad (3.9)$$

onde  $\Phi_o = h/2e = 2,064 \times 10^{-15} \text{Wb}$  é o **fluxo magnético quantizado**. Usando a equação 3.5 podemos escrever o fluxo em termos da corrente  $J_B$

$$\Phi = \frac{\Phi_o}{2\pi} \sin^{-1} \left( \frac{J_B}{J_C} \right). \quad (3.10)$$

Numa Junção curta a diferença de fase ( $\phi$ ) e a corrente ( $J_B$ ) dependem da diferença de potencial,  $V$  que é aplicado, isso nos leva a investigar o que ocorre com a fase e com a corrente se aplicarmos uma corrente contínua ( $DC$ ) e uma corrente alternada ( $AC$ ) aos supercondutores.

No caso da corrente contínua ( $DC$ ) a variação da tensão é nula,  $V = 0$ , o que nos leva diretamente a:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \rightarrow \phi = cte. \quad (3.11)$$

onde a fase é uma constante não necessariamente zero. Consequentemente, 3.5 é uma densidade de corrente finita existente mesmo com uma potencial externo nulo. A existência de uma corrente DC supercondutora foi prevista por Josephson em 1962 e observada experimentalmente por Anderson e Rowell em 1963 (REMOISSENET, 1999).

Por outro lado se for aplicada uma corrente alternada (AC), a tensão aplicada é constante,  $V = V_o$ , retomando a expressão 3.8, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{2e}{\hbar} V_o \\ d\phi &= \frac{2e}{\hbar} V_o dt \\ \phi - \phi_o &= \frac{2e}{\hbar} V_o t \\ \phi &= \frac{2e}{\hbar} V_o t + \phi_o\end{aligned}$$

A aplicação de uma corrente alternada implica numa fase que muda com o tempo e variando a densidade de corrente

$$J = J_C \sin \phi = J_C \sin \left( \frac{2e}{\hbar} V_o t + \phi_o \right) = J_C \sin(\omega_J t + \phi_o). \quad (3.12)$$

Se analisarmos a fase da corrente podemos encontrar sua frequência como segue,

$$f_J = \frac{\omega_J}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{2e}{\hbar} V_o = \frac{2e V_o}{h} \rightarrow \frac{f_J}{V_o} = \frac{2e}{h} = 483,6 \frac{MHz}{\mu V}. \quad (3.13)$$

### 3.1.2 Junção Josephson longa

Uma junção Josephson longa consiste de dois supercondutores idênticos estendidos de largura  $a$ , separados por uma camada dielétrica de espessura  $d$ , como ilustra a Fig. 9. Ignorando os efeitos dissipativos, a junção pode ser considerada como uma linha de transmissão elétrica, como mostra a Fig. 10, com uma capacitância por unidade de comprimento  $c = k\epsilon_o \frac{a}{d}$  em paralelo com uma indutância não-linear e uma indutância por unidade de comprimento  $l = \mu_o \frac{(d+2\lambda)}{a}$ , onde  $k$  é a constante dielétrica e  $\lambda$  é a profundidade de penetração de London (REMOISSENET, 1999).

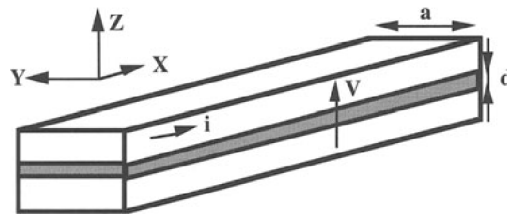


Figura 9 – Esquema de uma junção Josephson longa (REMOISSENET, 1999).

Como detalhamos nos apêndices de D-G, sobre as propriedades das linhas de transmissão elétrica, um indutor em paralelo com um capacitor gera efeitos dispersivos na linha de transmissão. A existência de elementos não-linear na constituição da linha, gera a não-linearidade. Os efeitos destas duas contribuições (dispersão e não-linearidade) se balanceiam produzindo sólitons.

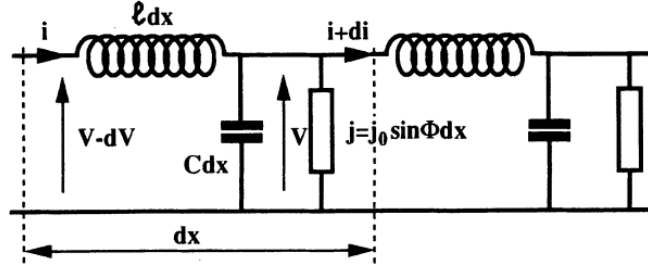


Figura 10 – Esquema representando um circuito elétrico equivalente a uma junção Josephson longa não-dissipativa (REMOISSENET, 1999).

Aplicando-se a Lei de Kirchhoff a uma seção unitária do modelo de comprimento  $dx$  obtém-se um conjunto de equações não-lineares a derivadas parciais que combinadas descrevem a eletrodinâmica da junção,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -l \frac{\partial i}{\partial t}, \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -c \frac{\partial V}{\partial t} - J_C \sin \Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = V \quad (3.14)$$

se combinarmos as equações em (3.14), obtemos a equação diferencial do fluxo magnético que circula no isolamento (ver Apêndice E),

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - lc \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c J_C \sin \frac{2\pi \Phi}{\Phi_o}, \quad (3.15)$$

onde  $\omega_J$  é a frequência de plasma Josephson, definida como:

$$\omega_J = J_C l. \quad (3.16)$$

Relacionando (3.8) com a equação (3.15) podemos reescrever a equação diferencial em termos da fase (como detalhado no Apêndice H),

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_J^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \omega_J^2 \sin \phi = 0 \quad (3.17)$$

onde  $c_J = \sqrt{LC}$  é a velocidade de onda linear. Essa equação descreve a evolução da diferença de fase quântica  $\phi$  ou, equivalentemente, a evolução do fluxo em unidades de  $\phi = 2\pi (\Phi/\Phi_o)$ .

Essa equação é semelhante à equação 2.15 que descreve a dinâmica de uma linha de transmissão mecânica, como foi detalhadamente discutido no Capítulo 2 e portanto a solução obtida para aquela equação pode ser usada diretamente para essa linha elétrica. As soluções são sólitons, aqui chamados de **fluxons**, cuja dinâmica através da junção está ilustrada na Fig.11.

$$\Phi = 4 \frac{\Phi_o}{2\pi} \tan^{-1} \left[ \exp \left( \frac{x - vt}{\lambda_J \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_J^2}}} \right) \right] \quad (3.18)$$

onde  $\lambda_J = c_J/\omega_J$  é a chamada profundidade de penetração Josephson, ela define precisamente o que é uma junção **curta** e **longa**. A equação (3.18) é um sóliton que se move com velocidade  $v$ , corresponde em saltar para  $a \pm 2\pi$  na diferença de fase  $\phi$  através do isolamento separado por dois supercondutores.

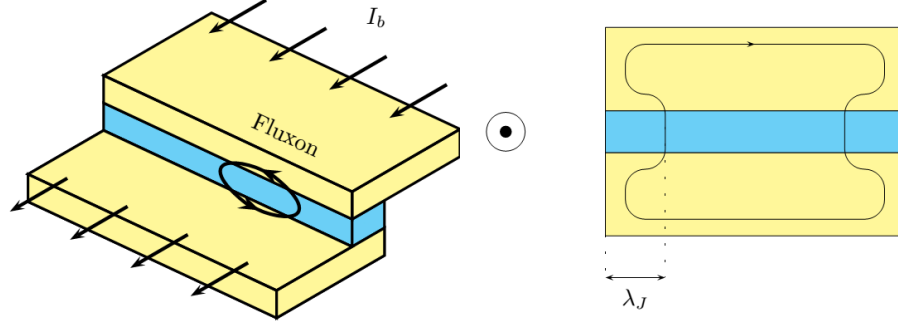


Figura 11 – Fluxon ao longo de uma junção Josephson longa (VISSER, 2002).

Tomando a derivada da equação (3.18) em relação a variável  $t$  temos uma expressão semelhante a velocidade de rotação do ângulo de rotação de um kink numa linha mecânica em (2.33), aqui essa equação representa o pulso de tensão que acompanha o fluxon:

$$V = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\Phi_o}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{\Phi_o \omega_J}{2\pi} \frac{2v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_J^2}}} \operatorname{sech} \left[ \frac{x - vt}{\lambda_J \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_J^2}}} \right]. \quad (3.19)$$

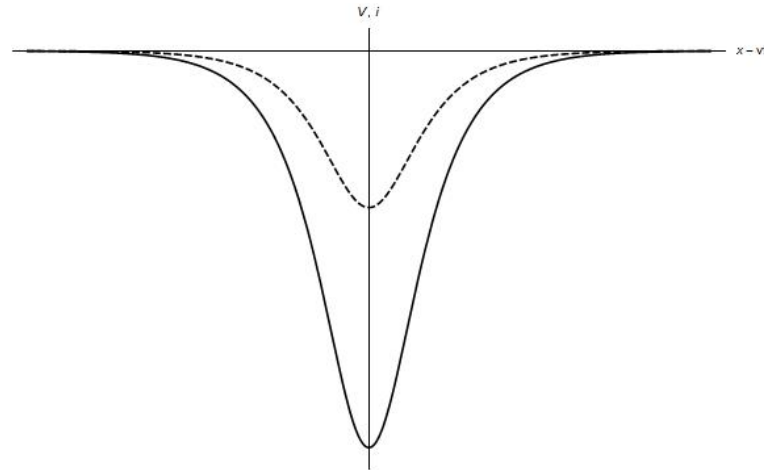


Figura 12 – Representação em linha pontilhada de um pulso de tensão e em linha contínua de um pulso de corrente, que viajam junto ao fluxon.

E derivando a equação (3.18) em relação a variável  $x$  obtemos uma expressão equivalente ao gradiente do ângulo de rotação na linha mecânica, que representa um pulso de corrente que acompanha o fluxon:

$$i = -\frac{\Phi_o}{2\pi l} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\Phi_o}{2\pi l \lambda_J} \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_J^2}}} \operatorname{sech} \left[ \frac{x - vt}{\lambda_J \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_J^2}}} \right]. \quad (3.20)$$

A propagação do fluxon é acompanhada por um pulso negativo de tensão (3.19) e um pulso negativo de corrente (3.20), como ilustrado na Fig.12.

## 4 Conclusão

Observamos que a equação que descreve a dinâmica do fluxo magnético numa junção Josephson é semelhante a equação de Sine-Gordon, que descreve o momento angular de pêndulos acoplados em uma linha de transmissão mecânica que num limite de pequenas amplitudes, é possível deduzir soluções analíticas. Essas soluções por sua vez descrevem sólitons kink, antikink e breather, que tiveram suas principais características exploradas. Essas soluções no caso da junção Josephson longa são fluxons, os vórtices Josephson ([RE-MOISSENET, 1999](#)). A dinâmica dos vórtices Josephson pode ser diretamente observada, pois dá origem a uma diferença de potencial através da junção e está associada a guias de onda de alta frequência ou qubits para computação quântica ([RODITCHEV et al.,](#) ).





# Referências

- DRAZIN P. G., J. R. S. *Solitons: an introduction*. Cambridge, England: Cambridge University, 1996.
- EISBERG, R. R. R. *Física Quântica: átomos, moléculas e partículas*. [S.l.]: Campus, 1994.
- FEYNMAN, R.; LEIGHTON, R.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics - Volume: 3*. California, USA: Pearson/Addison-Wesley, 1963.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica - Volume 2*. 1. ed. São Paulo, Brasil: Edgard Blücher, 1983.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica - Volume 2*. 4. ed. São Paulo, Brasil: Edgard Blücher, 2002.
- REMOISSENET, M. *Waves called solitons - concepts and experiments*. Berlin - Germany: Springer-Verlag, 1999.
- RODITCHEV, D. et al. Direct observation of josephson vortex cores. *Nature Physics*, v. 1, n. 11, p. 332–337.
- SCHMIDT, V. V. *The Physics of superconductors: Introduction to fundamentals and applications*. Berlin - Germany: Springer-Verlag, 1997.
- SEIDEL, P. *Applied Superconductivity - handbook on devices and applications*. Germany: Springer-Verlag, 2015.
- SHEAHEN, T. P. *Introduction to High-temperature superconductivity*. United States of America: Kluwer academic publishers, 2002.
- VISSER, T. *Modelling and analysis of long Josephson junctions*. Tese de doutorado — University of Twente, 2002.



## Apêndices



# APÊNDICE A – Outras soluções para a equação de Sine-Gordon

Da solução de um kink

$$\theta = 4\arctan\{\exp[\pm\gamma(X - uT)]\} \quad (\text{A.1})$$

podemos admitir mais soluções na forma

$$\theta = 4\arctan\left[\frac{F(X)}{G(T)}\right], \quad (\text{A.2})$$

onde  $F(X)$  e  $G(T)$  são funções arbitrárias. Retomamos a equação de Equação de Sine-Gordon, em termos de  $X$  e  $T$

$$\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}\right) = -\text{sen}(\theta) \quad (\text{A.3})$$

Simplificando  $\frac{\theta}{4} = \phi$  e  $\tan\left[\frac{F(X)}{G(T)}\right] = \tan(\phi) = y$  reescrevendo

$$4\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial T^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}\right) = -\text{sen}(4\phi) \quad (\text{A.4})$$

$$\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}\right) = -\frac{[1 - \tan^2(\phi)]}{[1 + \tan^2(\phi)]^2} \quad (\text{A.5})$$

$$\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}\right) + \frac{[1 - y^2]}{[1 + y^2]^2} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{2y}{(1 + y^2)^2}(y_X)^2 - \frac{y_{XX}}{(1 - y^2)} - \frac{2y}{(1 + y^2)^2}(y_T)^2 + \frac{y_{TT}}{(1 + y^2)} + \frac{y(1 - y^2)}{(1 + y^2)} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\left[\frac{2y}{(1 + y^2)^2}\right] [(y_X)^2 - (y_T)^2] + \left[\frac{1}{(1 + y^2)}(y_{TT} - y_{XX})\right] + \frac{y(1 - y^2)}{(1 + y^2)^2} = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$2y[(y_X)^2 - (y_T)^2] + [(1 + y^2)(y_{TT} - y_{XX})] + y(1 - y^2) = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$2[(y_X)^2 - (y_T)^2] + \left[\frac{(1 + y^2)}{y}(y_{TT} - y_{XX})\right] + (1 - y^2) = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$2[(y_T)^2 - (y_X)^2] + \left[\frac{(1 + y^2)}{y}(y_{XX} - y_{TT})\right] = (1 - y^2) \quad (\text{A.11})$$

A notação  $y$  subscrita de  $X$  ou  $T$ , é uma simplificação da derivada da função  $y$  em relação a variável:

$$y_X = \frac{\partial y}{\partial X} = \frac{\partial F(X)}{\partial X} \left(\frac{1}{G(T)}\right) = \frac{F(X)_X}{G(T)} = \frac{F_X}{G} \quad (\text{A.12})$$

$$y_{XX} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial y}{\partial X}\right) = \frac{\partial F_X}{\partial X} \left(\frac{1}{G}\right) = \frac{F_{XX}}{G} \quad (\text{A.13})$$

$$y_T = \frac{\partial y}{\partial T} = F(X) \frac{\partial G^{-1}(T)}{\partial X} = F(X)(-1)G^{-2}G(T)_T = \frac{-FG_T}{G^2} \quad (\text{A.14})$$

$$y_{TT} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial y}{\partial T} \right) = -F \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial G^{-2}G_T}{\partial T} \right) = \frac{2FG_T^2}{G^3} - \frac{FG_{TT}}{G^2} \quad (\text{A.15})$$

Substituindo as respectivas derivadas em  $X$  e  $T$  na equação (A.11), reescrevendo

$$\left(1 + \frac{F^2}{G^2}\right) \frac{G}{F} \left[ \frac{F_{XX}}{G} - \left( \frac{-FG_{TT}}{G^2} + \frac{2FG_T^2}{G^3} \right) \right] - 2 \left[ \left( \frac{-FG_T}{G^2} \right)^2 - \left( \frac{F_X}{G} \right)^2 \right] = 1 - \frac{F^2}{G^2} \quad (\text{A.16})$$

$$\left( \frac{F^2 + G^2}{G^2} \right) \left[ \frac{F_{XX}}{F} + \frac{2G_T^2}{G^2} - \frac{G_{TT}}{G} \right] - 2 \left[ \left( \frac{F^2 G_T^2}{G^4} \right) - \frac{F_X^2}{G^2} \right] = \frac{G^2 - F^2}{G^2} \quad (\text{A.17})$$

$$\left( \frac{F^2 + G^2}{G^2} \right) \left[ \frac{F_{XX}}{F} - \frac{G_{TT}}{G} \right] + 2 \frac{G_T^2}{G^2} \left( \frac{F^2 + G^2}{G^2} \right) - 2 \left[ \left( \frac{F^2 G_T^2}{G^4} \right) - \frac{F_X^2}{G^2} \right] + \frac{F^2 - G^2}{G^2} = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\left( \frac{F^2 + G^2}{G^2} \right) \left[ \frac{F_{XX}}{F} - \frac{G_{TT}}{G} \right] - \frac{2G_T^2}{G^2} \left( \frac{F^2}{G^2} - \frac{F^2 + G^2}{G^2} \right) - \frac{2F_X^2}{G^2} + \frac{F^2 - G^2}{G^2} = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\left[ (F^2 + G^2) \left( \frac{F_{XX}}{F} + \frac{G_{TT}}{G} \right) \right] - 2[(F_X)^2 + (G_T)^2] + F^2 - G^2 = 0 \quad (\text{A.20})$$

Derivando a equação (A.20) em relação a  $X$  e a  $T$  sucessivamente, obtemos:

$$G^2 \left( \frac{F_{XX}}{F} \right)_X + (F^2)_X \left( \frac{G_{TT}}{G} \right) + (FF_{XX})_X - [2(F_X)^2 - F^2]_X = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$(G^2)_T \left( \frac{F_{XX}}{F} \right)_X + (F^2)_X \left( \frac{G_{TT}}{G} \right)_T = 0. \quad (\text{A.22})$$

Separando as variáveis

$$(G^2)_T \left( \frac{F_{XX}}{F} \right)_X = -(F^2)_X \left( \frac{G_{TT}}{G} \right)_T \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{1}{(F^2)_X} \left( \frac{F_{XX}}{F} \right)_X = -\frac{1}{(G^2)_T} \left( \frac{G_{TT}}{G} \right)_T = A, \quad \text{onde } A \text{ é uma constante.} \quad (\text{A.24})$$

Isolando o primeiro termo e igualando a  $A$

$$\left( \frac{F_{XX}}{F} \right)_X = A(F^2)_X \quad (\text{A.25})$$

Integrando em relação a  $X$

$$\int \left( \frac{F_{XX}}{F} \right)_X dX = \int A(F^2)_X dX \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{F_{XX}}{F} = AF^2 + B_1 \quad (\text{A.27})$$

$$F_{XX} = AF^3 + B_1 F \quad (\text{A.28})$$

Multiplicando ambos os lados da equação por  $2F_X$

$$2F_X F_{XX} = 2F_X (AF^3 + B_1 F) \quad (\text{A.29})$$

Integrando em relação a  $X$  temos

$$(F_X)^2 = \frac{A}{2}F^4 + B_1F^2 + C_1 \quad (\text{A.30})$$

Analogamente seguindo esses passos para

$$\left(\frac{G_{TT}}{G}\right)_T = -A(G^2)_T \quad (\text{A.31})$$

Integrando em relação a  $T$

$$\int \left(\frac{G_{TT}}{G}\right)_T = - \int AG_T^2 \quad (\text{A.32})$$

$$\left(\frac{G_{TT}}{G}\right) = -AG^2 + B_2 \quad (\text{A.33})$$

$$G_{TT} = -AG^3 + B_2G \quad (\text{A.34})$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $2G_T$

$$2G_TG_{TT} = 2G_T(-AG^3 + B_2G) \quad (\text{A.35})$$

Integrando em relação a  $T$  temos

$$(G_T)^2 = \frac{-A}{2}G^4 + B_2G^2 + C^2 \quad (\text{A.36})$$

Achamos as expressões de  $(F_X)^2$  e  $(G_T)^2$ , substituindo (A.30) e (A.36) em (A.20)

$$\left[(F^2 + G^2) \left(\frac{F_{XX}}{F} + \frac{G_{TT}}{G}\right)\right] - 2\left[\left(\frac{A}{2}F^4 + B_1F^2 + C_1\right)^2 + \left(\frac{-A}{2}G^4 + B_2G^2 + C^2\right)^2\right] + F^2 - G^2 = 0 \quad (\text{A.37})$$

Organizando os termos e simplificando temos

$$(B_1 - B^2)(G^2 - F^2) + 2(C_1 - C_2) + (F^2 - G^2) = 0 \quad (\text{A.38})$$

Para a expressão (A.38) for igual a 0 isso implica em  $B_1 - B_2 = 1$  e  $C_1 - C_2 = 0$ . Provando:

$$(G^2 - F^2) \underbrace{(B_1 - B_2)}_1 + 2 \underbrace{(C_1 - C_2)}_0 + (F^2 - G^2) = 0 \quad (\text{A.39})$$

$$G^2 - F^2 + F^2 - G^2 = 0 \quad (\text{A.40})$$

$$G^2 - F^2 = G^2 - F^2 \quad (\text{A.41})$$

Definindo  $A = -2q^2$ ,  $B_1 = b^2$  e  $C_1 = n^2$ , alteramos as expressões (A.30) e (A.36) para:

$$\left(\frac{dF}{dX}\right)^2 = -q^2F^4 + b^2F^2 + n^2 \quad (\text{A.42})$$

$$\left(\frac{dG}{dT}\right)^2 = q^2G^4 + (b^2 - 1)G^2 - n^2 \quad (\text{A.43})$$

onde  $b$ ,  $q$  e  $n$  são constantes arbitrárias e seus valores irão determinar diferentes soluções do tipo (A.2). A seguir iremos explorar algumas dessas soluções.

## A.1 Solução sólito kink

Caso onde  $q = 0$ ,  $b > 1$  e  $n = 0$ , portanto reduz a expressões (A.42) em:

$$\left(\frac{dF}{dX}\right)^2 = b^2 F^2 \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{dF}{dX} = \pm b F \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{dF}{F} = \pm b dX \quad (\text{A.46})$$

e a expressão (A.43) em:

$$\left(\frac{dG}{dT}\right)^2 = (b-1)^2 G^2 \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{dG}{dT} = \pm(b-1)G \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{dG}{G} = \pm(b-1) dT \quad (\text{A.49})$$

Integrando a expressão (A.46)

$$\int \frac{dF}{F} = \int \pm b dX \quad (\text{A.50})$$

$$\ln F = \pm b X + C' \quad (\text{A.51})$$

$$F = K_1 \exp(\pm b X). \quad (\text{A.52})$$

E integrando a expressão (A.49)

$$\int \frac{dG}{G} = \int \pm(b-1) dT \quad (\text{A.53})$$

$$\ln G = \pm\sqrt{b^2-1} T + K' \quad (\text{A.54})$$

$$G = K_2 \exp(\pm\sqrt{b^2-1} T). \quad (\text{A.55})$$

Retomando a equação (A.2) e substituindo as expressões de  $F$  e  $G$ , temos:

$$\theta = 4 \arctan \left[ \frac{F(X)}{G(T)} \right] \quad (\text{A.56})$$

$$\theta = 4 \arctan \left[ \frac{K_1 \exp(\pm b X)}{K_2 \exp(\pm\sqrt{b^2-1} T)} \right] \quad (\text{A.57})$$

$$\theta = 4 \arctan \left[ \frac{K_1}{K_2} \exp(\pm b X) \pm \sqrt{b^2-1} T \right] \quad (\text{A.58})$$

Comparando essa solução de um sólito kink com a solução (2.32), chegamos a conclusão que  $u = \frac{\sqrt{b^2-1}}{b}$  e  $\frac{K_1}{K_2} = 1$ ,

$$\theta = 4 \arctan [\gamma \exp \pm (X \pm uT)] \quad (\text{A.59})$$

escolhendo o sinal apropriado temos um sólito kink ou anti-kink.



## A.2 Solução kink-kink

Caso onde  $q = 0$ ,  $b^2 > 1$  e  $n \neq 0$ . Assumindo  $n = b$  são soluções:

$$F = \sinh(bX) \quad (\text{A.60})$$

e

$$G = \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} \cosh(\sqrt{1-b^2}T). \quad (\text{A.61})$$

Substituindo em (A.2) temos

$$\theta = 4 \arctan \left[ \frac{F(X)}{G(T)} \right] \quad (\text{A.62})$$

$$\theta = 4 \arctan \left[ \underbrace{\frac{b}{\sqrt{1-b^2}}}_u \frac{\sinh(bX)}{\cosh(\sqrt{1-b^2}T)} \right] \quad (\text{A.63})$$

$$\theta = 4 \arctan \left[ u \sinh \left( \frac{X}{\sqrt{1-u^2}} \right) \operatorname{sech} \left( \frac{uT}{\sqrt{1-u^2}} \right) \right] \quad (\text{A.64})$$

$$\theta = 4 \arctan [u \sinh(\gamma X) \operatorname{sech}(u\gamma T)]. \quad (\text{A.65})$$

Reescrevendo as funções na forma exponencial:

$$\theta = 4 \arctan \left[ u \left( \frac{e^{\gamma X} - e^{-\gamma X}}{2} \right) \left( \frac{2}{e^{u\gamma T} + e^{-u\gamma T}} \right) \right] \quad (\text{A.66})$$

$$\theta = 4 \arctan \left[ u \left( \frac{e^{\gamma X} - e^{-\gamma X}}{e^{u\gamma T} + e^{-u\gamma T}} \right) \right]. \quad (\text{A.67})$$

A solução (A.65) descreve a solução de dois kinks, que pode ser provado da seguinte maneira:

Quando  $X \rightarrow -\infty$ , o termo  $e^{\gamma X} \rightarrow 0$  e a solução

$$\theta \rightarrow 4 \arctan \left[ u \left( \frac{-e^{-\gamma X}}{e^{u\gamma T} + e^{-u\gamma T}} \right) \right]. \quad (\text{A.68})$$

Separando a solução para  $X \rightarrow -\infty$  em:

$$\theta \rightarrow \theta_{k1} = 4 \arctan [-u e^{-\gamma(X-uT)}] \text{ para } T \rightarrow -\infty \quad (\text{A.69})$$

$$\theta \rightarrow \theta_{k2} = 4 \arctan [-u e^{-\gamma(X+uT)}] \text{ para } T \rightarrow +\infty \quad (\text{A.70})$$

Usando a identidade  $\arctan(y) = -\arctan(\frac{1}{y}) + \frac{\pi}{2}$  e  $\arctan(-y) = -\arctan(y)$ , reescrevendo  $\theta_{k1}$  e  $\theta_{k2}$ :

$$\theta \rightarrow \theta_{k1} = 4 \arctan \left[ \frac{e^{\gamma(X-uT)}}{u} \right] + \frac{\pi}{2} \text{ para } T \rightarrow -\infty \quad (\text{A.71})$$

$$\theta \rightarrow \theta_{k2} = 4\arctan\left[\frac{e^{\gamma(X+uT)}}{u}\right] + \frac{\pi}{2} \text{ para } T \rightarrow +\infty \quad (\text{A.72})$$

E para  $X \rightarrow +\infty$ , por simetria as soluções são invertidas:

$$\theta \rightarrow \theta_{k2} = 4\arctan\left[\frac{e^{\gamma(X+uT)}}{u}\right] + \frac{\pi}{2} \text{ para } T \rightarrow -\infty. \quad (\text{A.73})$$

$$\theta \rightarrow \theta_{k1} = 4\arctan\left[\frac{e^{\gamma(X-uT)}}{u}\right] + \frac{\pi}{2} \text{ para } T \rightarrow +\infty \quad (\text{A.74})$$

Ao estudarmos os limites da solução obtemos  $\theta_{k1}$  e  $\theta_{k2}$  que são sólitons kinks que partem um de  $-\infty$  e o outro de  $+\infty$ , com velocidade  $-u$  e  $+u$  respectivamente e ao longo do tempo se colidem e continuam sua trajetória com a mesma forma já que a solução obtida para  $\theta_{k1}$  e  $\theta_{k2}$  são as mesmas para  $T \rightarrow -\infty$  e  $T \rightarrow +\infty$ .

### A.3 Solução sólton breather

Caso em que  $q \neq 0$ ,  $b^2 < 1$  e  $n = 0$ , portanto reduz as expressões (A.42) em:

$$\left(\frac{dF}{dX}\right)^2 = -q^2 F^4 + b^2 F^2 = q^2 F^2 (b'^2 - F^2) \text{ onde } b'^2 = \frac{b^2}{q^2} \quad (\text{A.75})$$

$$\frac{dF}{F\sqrt{b'^2 - F^2}} = \pm q dX \quad (\text{A.76})$$

e a expressão (A.43) em

$$\left(\frac{dG}{dT}\right)^2 = q^2 G^2 \left[G^2 + \frac{(b^2 - 1)}{q^2}\right] = q^2 G^2 (G^2 - b''^2) \text{ onde } b''^2 = \frac{(b^2 - 1)}{q^2} \quad (\text{A.77})$$

$$\frac{dG}{G\sqrt{G^2 - b''^2}} = \pm q dT \quad (\text{A.78})$$

A integral de uma equação na forma

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{R}} = \frac{-1}{\sqrt{A}} \ln \left[ \frac{\sqrt{R} + \sqrt{A}}{x} + \frac{B}{2\sqrt{A}} \right] \text{ para } A > 0; \quad (\text{A.79})$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \operatorname{sen}^{-1} \left[ \frac{Bx + 2A}{x\sqrt{B^2 - 4AC}} \right] \text{ para } A < 0; \quad (\text{A.80})$$

onde  $R(x)$  é um polinômio  $R = A + Bx + Cx^2$  e  $x$  pode ser  $F$  ou  $G$ .

Se  $x=F$ , então:

$$R(F) = A + BF + CF^2 = b'^2 + 0F + F^2 = b'^2 + F^2 \text{ isso implica em } A > 0. \quad (\text{A.81})$$

Se  $x=G$ , então:

$$R(G) = A + BG + CG^2 = -b''^2 + 0G + G^2 = -b''^2 + G^2 \text{ isso implica em } A < 0. \quad (\text{A.82})$$

Portanto a integral da express3o (A.76) 3 a do caso  $A > 0$ :

$$\int \frac{dF}{F\sqrt{b'^2 - F^2}} = \frac{-1}{b'} \ln \left( \frac{\sqrt{b'^2 - F^2} + b'}{F} \right) = \pm qX + C_1. \quad (\text{A.83})$$

E a integral da express3o (A.78) 3 a do caso  $A < 0$ :

$$\int \frac{dG}{G\sqrt{G^2 + b''^2}} = \frac{1}{b''} \text{sen}^{-1} \left( \frac{-b''}{G} \right) = \pm qT + C_2. \quad (\text{A.84})$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  s3o as coordenadas iniciais do espa3o e do tempo, respectivamente, fazendo elas igual a zero e reescrevendo a express3o (A.83):

$$\pm qX = \frac{-1}{b'} \ln \left( \frac{\sqrt{b'^2 - F^2} + b'}{F} \right) \quad (\text{A.85})$$

$$e^{\pm qX} = \left( \frac{\sqrt{b'^2 - F^2} + b'}{F} \right) \quad (\text{A.86})$$

$$[F e^{\pm qX} - b']^2 = b'^2 - F^2 \quad (\text{A.87})$$

$$F = \frac{2b'e^{\pm qX}}{(1 + e^{\pm 2qX})} = \text{sech}(qbX)b' \quad (\text{A.88})$$

E reescrevendo a express3o (A.84):

$$\pm qT = \frac{1}{b''} \text{sen}^{-1} \left( \frac{-b''}{G} \right) \quad (\text{A.89})$$

$$\pm qb''T = \text{sen}^{-1} \left( \frac{-b''}{G} \right) \quad (\text{A.90})$$

$$\text{sen}(\pm qb''T) = \frac{-b''}{G} \quad (\text{A.91})$$

$$G = \frac{-b''}{\text{sen}(\pm qb''T)} \quad (\text{A.92})$$

Finalmente substituindo as equações (A.91) e (A.92) em (A.2):

$$\theta = 4\arctan \left[ \operatorname{sech}(qb'X) \operatorname{sen}(qb''T) \frac{b'}{b''} \right] \quad (\text{A.93})$$

Define-se  $\Omega = \sqrt{1 - b^2}$  e recordando que  $b' = \frac{b}{q}$  e  $b'' = \frac{\sqrt{(b-1)}}{q}$ , pode-se reescrever a solução da seguinte forma:

$$\theta_B = 4\arctan \left[ \frac{\sqrt{1 - \Omega^2}}{\Omega} \operatorname{sech}(\sqrt{1 - \Omega^2}X) \operatorname{sen}(\Omega T) \right] \quad (\text{A.94})$$

A solução que obtemos ( $\theta_B$ ) corresponde ao sóliton breather, como pode ser visto na Fig.(13) uma onda estacionária, sua forma é modulada pela frequência  $\Omega$ , conforme a Fig.(14). Às vezes o sóliton breather é chamado também de bion, por causa que corresponde a ligação de dois sólitons: um kink e um anti-kink, sua amplitude varia .

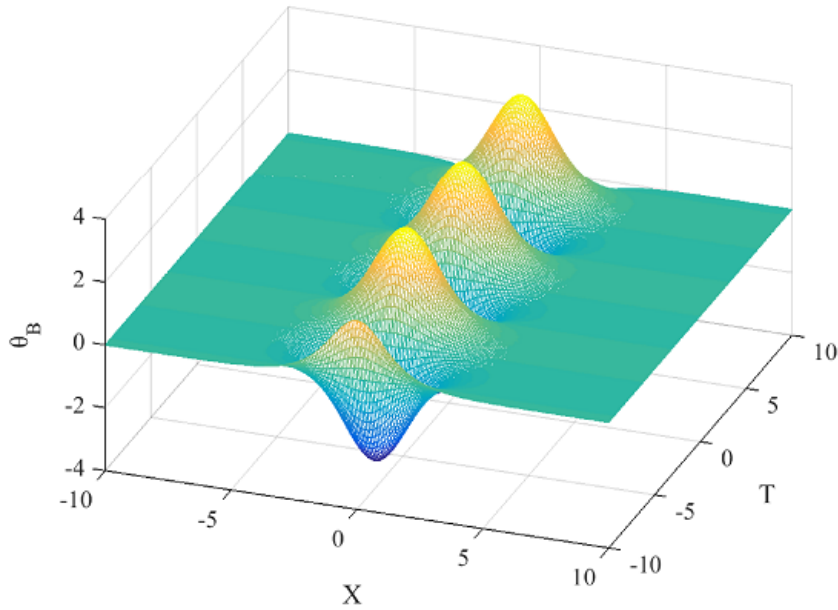


Figura 13 – Representação em 3D de um Breather, onde é possível ver seu caráter estático.

A Figura (15) nos mostra como se dá a variação da amplitude com o tempo, observa-se que com o decorrer do tempo a amplitude varia de pico para um vale, recordando uma "respiração", o que explica o termo Breather (respiração, em inglês). Usando a transformada de Lorentz, fazendo uma mudança de variáveis de  $(X, T)$  para  $(X', T')$

$$\theta_B = 4\arctan \left[ \frac{\sqrt{1 - \Omega^2}}{\Omega} \operatorname{sech}[(\gamma\sqrt{1 - \Omega^2}(X - uT))] \operatorname{sen}[\gamma\Omega(T - uX)] \right] \quad (\text{A.95})$$

Utilizando as relações  $u = \frac{v}{c_o}$ ,  $d = \frac{c_o}{\omega_o}$  e  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$ , definidas anteriormente e definindo  $\Omega = \frac{\omega_B}{\omega_o}$ , onde  $\omega_B$  é a frequência de oscilação interna do breather. A solução de um Breather

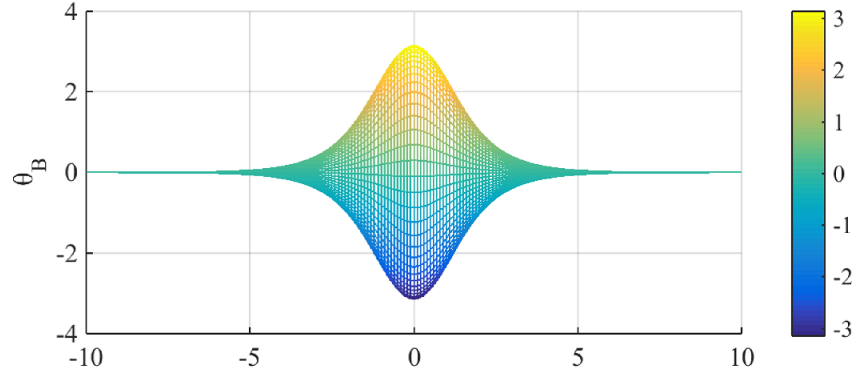


Figura 14 – Representação de um Breather, onde pode-se ver a forma desse sólon.

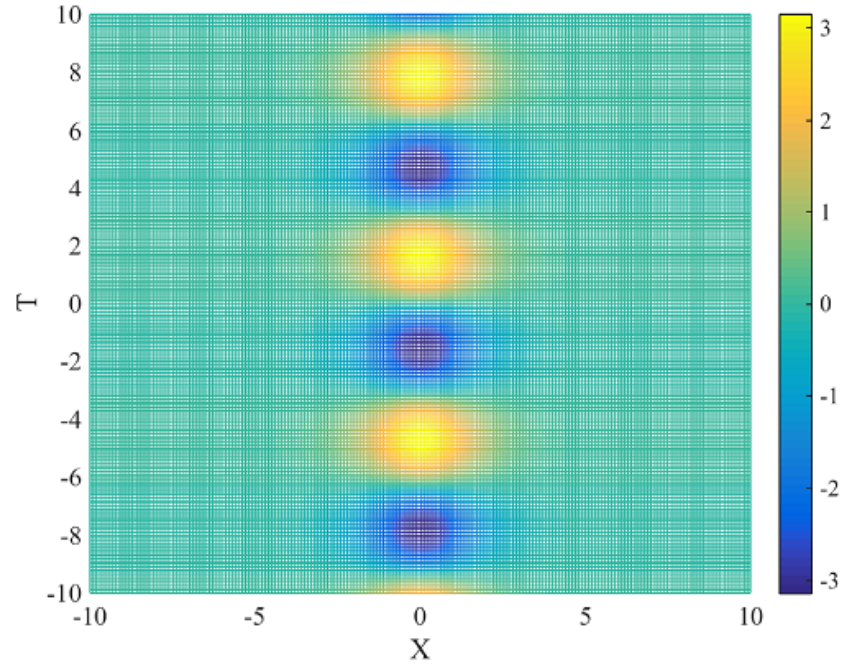


Figura 15 – Representação topográfica de um Breather.

é reescrita em termos das coordenadas originais (x,t):

$$\theta_B = 4 \arctan \left\{ \frac{\omega_o \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_B}{\omega_o}\right)^2}}{\omega_B} \operatorname{sech} \left[ \frac{\gamma}{d} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_B}{\omega_o}\right)^2} (x - vt) \right] \operatorname{sen} \left[ \gamma \omega_B \left( t - \frac{vx}{c_o^2} \right) \right] \right\} \quad (\text{A.96})$$

$$\theta_B = 4 \arctan \left\{ \sqrt{\left(\frac{\omega_o}{\omega_B}\right)^2 - 1} \operatorname{sech} \left[ \frac{\gamma}{d} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_B}{\omega_o}\right)^2} (x - vt) \right] \operatorname{sen} \left[ \gamma \omega_B \left( t - \frac{vx}{c_o^2} \right) \right] \right\} \quad (\text{A.97})$$

A amplitude máxima de um bion é

$$A_B = 4 \arctan \left( \sqrt{1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_o^2}} \right) \quad (\text{A.98})$$

A energia do Breather pode ser calculada semelhantemente ao Kink,

$$\theta_B = 16 \frac{I}{a} c_o \omega_o \gamma \sqrt{1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_o^2}}. \quad (\text{A.99})$$

## APÊNDICE B – Cálculo de energia de um sólon kink

Um sólon do tipo kink é descrito pela equação (2.32) sua energia total ou hamiltoniana dada pela expressão (2.51), que pode ser reescrita como a soma de termos de energias:

$$E = \frac{I}{a} \omega_o c_o (E_1 + E_2 + E_3), \quad (\text{B.1})$$

calculados a seguir:

- $E_1$ , é a energia cinética rotacional:

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial T} \right)^2 dX \\ E_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial 4 \arctan[\exp(\gamma s)]}{\partial T} \right)^2 dX \\ E_1 &= \frac{16}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{\gamma e^{\gamma s}}{1 + e^{2\gamma s}} \right) \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right) \right]^2 dX \\ E_1 &= 8u^2 \gamma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sech}^2(\gamma s)}{4} dX \\ E_1 &= 2u^2 \gamma^2 \frac{\tanh(\gamma s)}{\gamma} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ E_1 &= 4u^2 \gamma \end{aligned}$$

- $E_2$ , é a energia potencial devido ao acoplamento dos pêndulos:

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 dX \\ E_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial 4 \arctan[\exp(\gamma s)]}{\partial X} \right)^2 dX \\ E_2 &= \frac{16}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{\gamma e^{\gamma s}}{1 + e^{2\gamma s}} \right) \left( \frac{\partial s}{\partial X} \right) \right]^2 dX \\ E_2 &= 8\gamma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sech}^2(\gamma s)}{4} dX \\ E_2 &= 2\gamma^2 \frac{\tanh(\gamma s)}{\gamma} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ E_2 &= 4\gamma \end{aligned}$$

- $E_3$ , é a energia potencial devido a gravidade:

$$E_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos\theta) dX$$

$$E_3 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) dX$$

$$E_3 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \underbrace{\{2\arctan[\exp(\gamma s)]\}}_y dX$$

$$E_3 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 y dX$$

$$E_3 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{2\sin(y)\cos(y)\cos(y)}{\cos(y)} \right) dX$$

$$E_3 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (2\tan(y)\cos^2(y))^2 dX$$

$$E_3 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{2\tan(y)}{\sec^2(y)} \right)^2 dX$$

$$E_3 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{2\tan(y)}{1 + \tan^2(y)} \right)^2 dX$$

$$E_3 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{2\exp(\gamma s)}{(1 + \exp(2\gamma s))} \right]^2 dX$$

$$E_3 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\gamma s) dX$$

$$E_3 = 2 \frac{\tanh(\gamma s)}{\gamma} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$E_3 = \frac{4}{\gamma}$$



# APÊNDICE C – Equações básicas de Josephson

As funções de onda para cada supercondutor que formam uma junção Josephson devem satisfazer o seguinte sistema de equações de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = eV \Psi_1 - K \Psi_2 \quad (\text{C.1})$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -eV \Psi_2 - K \Psi_1 \quad (\text{C.2})$$

sendo  $K$  uma constante que leva em conta o acoplamento entre os supercondutores na junção. Lembrando que pela proposta de Feynman  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  são funções de onda para os supercondutores  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente, numa junção como ilustra a Figura 7:

$$\Psi_1 = \sqrt{\rho_1} e^{i\phi_1} \quad (\text{C.3})$$

$$\Psi_2 = \sqrt{\rho_2} e^{i\phi_2} \quad (\text{C.4})$$

lembrando que  $\rho$  é a densidade de pares de Cooper e  $\phi$  a fase dos pares. Combinando as equações (C.3) e (C.4) em (C.1), temos:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} &= eV \sqrt{\rho_1} e^{i\phi_1} - K \sqrt{\rho_2} e^{i\phi_2} \\ i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \sqrt{\rho_1} &= eV \rho_1 e^{i\phi_1} - K \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{i\phi_2} \\ i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\rho_1} e^{i\phi_1}) \right] \sqrt{\rho_1} &= eV \rho_1 e^{i\phi_1} - K \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{i\phi_2} \\ i\hbar \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} e^{i\phi_1} + j\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} e^{i\phi_1} \right) &= eV \rho_1 e^{i\phi_1} - K \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{i\phi_2} \\ i\hbar \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + j\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) (cos\phi_1 + i sen\phi_1) &= eV \rho_1 (cos\phi_1 + i sen\phi_1) - K \sqrt{\rho_1 \rho_2} (cos\phi_2 + i sen\phi_2) \end{aligned}$$

Portanto dessa última expressão, separando os termos reais ( $Re$ ) e imaginários ( $Im$ ):

$$Re : -\hbar \frac{\partial \rho_1}{\partial t} sen\phi_1 - \hbar \rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} cos\phi_1 = eV cos\phi_1 - K \sqrt{\rho_1 \rho_2} cos\phi_2 \quad (\text{C.5})$$

$$Im : \frac{\hbar}{2} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} cos\phi_1 - \hbar \rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} sen\phi_1 = eV \rho_1 sen\phi_1 - K \sqrt{\rho_1 \rho_2} sen\phi_2 \quad (\text{C.6})$$

Se multiplicarmos o termo real ( $Re$ ) por  $-sen\phi_1$  e o imaginário ( $Im$ ) por  $cos\phi_1$  e somarmos os dois termos obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{\hbar}{2} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -K \sqrt{\rho_1 \rho_2} sen\phi \quad (\text{C.7})$$

onde  $\phi = \phi_2 - \phi_1$ . Por outro lado se combinarmos as equações (C.3) e (C.4) em (C.2) e seguirmos a mesma análise feita anteriormente, teremos a seguinte expressão:

$$\frac{\hbar}{2} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = +K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \operatorname{sen} \phi \quad (\text{C.8})$$

A densidade de corrente que flui de um supercondutor para o outro pelo isolante é:

$$\begin{aligned} J_B &= 2e \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -2e \frac{\partial \rho_2}{\partial t} \\ J_B &= \frac{4eK}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \operatorname{sen} \phi \\ J_B &= J_C \operatorname{sen} \phi \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

onde  $J_C$  é amplitude da densidade de corrente que se denota densidade de corrente crítica.

Retomando as equações (C.5) e (C.6), multiplicando a parte real por  $(\cos \phi_1)$  e a parte imaginária por  $(\operatorname{sen} \phi_1)$  e somando as expressões temos:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \frac{-eV}{\hbar} + \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos \phi, \quad (\text{C.10})$$

seguindo essa mesma análise para a combinação das equações (C.3), (C.4) e (C.2), obtemos:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \frac{eV}{\hbar} + \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos \phi. \quad (\text{C.11})$$

Para supercondutores similares,  $\rho_1/\rho_2 = 1$ , temos que a diferença de fase das funções de onda,  $\psi_1$  e  $\psi_2$  é:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar} \quad (\text{C.12})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar} \quad (\text{C.13})$$

As equações (C.9) e (C.13) são as equações básicas que descrevem o efeito Josephson.

# APÊNDICE D – Ondas lineares em linhas de transmissão elétrica

Atualmente, linhas de transmissão lineares fornecem as conexões virtualmente de todos os sistemas computacionais e de comunicação, na forma de cabos axiais e microstrips (REMOISSENET, 1999). Nós revisaremos diversas propriedades das ondas lineares que se propagam em uma única dimensão espacial por uma linha de transmissão linear. Primeiro iremos considerar a propagação unidirecional de ondas lineares não-dispersivas em uma linha de transmissão básica. Depois, nós examinaremos efeitos específicos na propagação de ondas causadas pela dispersão.

## D.1 Ondas lineares não-dispersivas

Imagine uma linha de transmissão contínua, como ilustrado na Fig.16(a), onde a voltagem  $V(x, t)$  e a corrente  $i(x, t)$  que são definidos como dependentes da distância  $x$  ao longo dos condutores e do tempo  $t$ . A linha é considerada sem perdas e aterrada, nestas condições ela pode ser representada por um circuito elétrico equivalente como pode ser visto na Fig. 16(b), onde  $l$  representa um densidade de indutância por unidade de comprimento e  $c$  uma densidade de capacitância por unidade de comprimento.

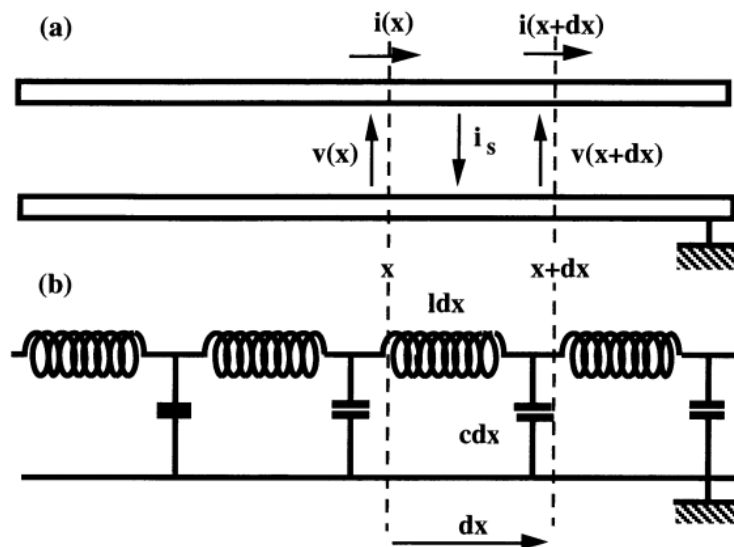


Figura 16 – (a): Esquema de uma linha de transmissão contínua, sem perdas e aterrada. (b): E esquema de seu circuito elétrico equivalente (REMOISSENET, 1999).

A linha de transmissão sem perdas é um caso idealizado, pois na realidade sempre há

perdas devido a resistência dos fios condutores e a condutância entre eles, essas perturbações são negligenciadas. Aplicando a lei de Kirchhoff, a diferença entre as voltagens em  $x$  e  $x + dx$  é dada por

$$V(x) - V(x + dx) = dx \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (\text{D.1})$$

onde pela lei de indução de Faraday,  $\Phi$  é fluxo magnético total por unidade de comprimento entre os dois condutores que é dado por

$$\Phi = li. \quad (\text{D.2})$$

No caso linear, a indutância  $l$  é independente da corrente  $i$  e das equações (D.1) e (D.2) temos

$$V(x) - V(x + dx) = dx \frac{\partial \Phi}{\partial t} = dx l \frac{\partial i(x)}{\partial t} \quad (\text{D.3})$$

A expressão do lado direito da equação (D.3) pode ser reescrito como

$$dx l \frac{\partial i(x + dx)}{\partial t}, \quad (\text{D.4})$$

como  $dx$  é muito pequeno podemos expandir o termo da corrente em termos de uma série de Taylor

$$i(x + dx) \approx i(x) + dx \frac{\partial i(x)}{\partial x} + \dots \quad (\text{D.5})$$

A diferença entre as correntes que passam em série,  $i(x)$  e  $i(x + dx)$  é igual a corrente,  $i_s = \partial q / \partial t$ , onde  $q$  representa a carga elétrica por unidade de comprimento:

$$i(x) - i(x + dx) = dx \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (\text{D.6})$$

Quando a carga  $q$ , é uma função linear da voltagem e a capacitância  $c$  é independente da voltagem temos que

$$q = cV, \quad (\text{D.7})$$

combinando as equações (D.7) e (D.6) podemos escrever a diferença entre as correntes como

$$i(x) - i(x + dx) = dx c \frac{\partial V(x)}{\partial t}. \quad (\text{D.8})$$

Expandindo a série de Taylor para a voltagem em  $(x + dx)$ , semelhante a corrente em  $(x + dx)$ , pode ser escrita como

$$V(x + dx) \approx V(x) + dx \frac{\partial V(x)}{\partial x} + \dots, \quad (\text{D.9})$$

desta forma podemos reescrever a equação (D.3) como

$$\begin{aligned} V(x) - \left[ V(x) + dx \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right] &= dx l \frac{\partial i(x)}{\partial t} \\ dx \frac{\partial V(x)}{\partial x} &= -dx l \frac{\partial i(x)}{\partial t} \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x} &= -l \frac{\partial i(x)}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Esta mesma simplificação podemos fazer com a expressão (D.8) em termos da expansão de Taylor da corrente em  $(x + dx)$ ,

$$\begin{aligned} i(x) - \left[ i(x) + dx \frac{\partial i(x)}{\partial x} \right] &= dx \, c \frac{\partial V(x)}{\partial t} \\ dx \frac{\partial i(x)}{\partial x} &= -dx \, c \frac{\partial V(x)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(x)}{\partial x} &= -c \frac{\partial V(x)}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Desta maneira obtemos duas equações diferenciais para a voltagem  $V(x)$  e para a corrente  $i(x)$ :

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -l \frac{\partial i(x)}{\partial t}, \quad \frac{\partial i(x)}{\partial x} = -c \frac{\partial V(x)}{\partial t}. \quad (\text{D.12})$$

Derivando parcialmente a equação diferencial para a voltagem  $V(x)$  em função de  $x$  obtemos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -l \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}, \quad (\text{D.13})$$

e derivando parcialmente a equação diferencial para a corrente  $i(x)$  em função de  $t$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \quad (\text{D.14})$$

Combinando as equações (D.13) e (D.14) obtemos a equação de onda linear

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -l \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -l \left( -c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) = lc \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{lc} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - v_o^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Esta equação também é denominada “Equação do telegrafista” e data do século XIX. Uma equação similar em termos da corrente também pode ser obtida se derivarmos as equações diferenciais (D.12) da voltagem  $V(x)$  e  $i(x)$  em função de  $t$  e  $x$  respectivamente

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = -\frac{1}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}. \quad (\text{D.16})$$

combinando essas duas equações obtemos a equação de onda linear em termos da corrente  $i(x)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} &= -\frac{1}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{l} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{lc} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{1}{lc} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - v_o^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Como a corrente é facilmente mensurável os resultados e discussões experimentais são derivados dela. Na equação de onda linear a quantidade  $v_o$  é a velocidade de propagação, que depende da indutância por unidade de comprimento  $l$  e pela capacitância por unidade de comprimento  $c$  e é definida como

$$v_o^2 = \frac{1}{\sqrt{lc}}. \quad (\text{D.18})$$

A equação do telegrafista em termos da voltagem  $V(x)$ ,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - v_o^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{D.19})$$

pode ser reescrita em termos de uma novas variáveis,  $X$  e  $T$ , onde

$$X = x - v_o t, \quad T = x + v_o t, \quad (\text{D.20})$$

desta forma iremos mudar de coordenadas,  $(x, t) \rightarrow (X, T)$ . Para obtermos a expressão da equação do telegrafista nessas novas variáveis precisamos primeiro obter as derivadas parciais em  $X$  e  $T$ , tomando a derivada parcial em função de  $x$  temos

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left( \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial T}. \quad (\text{D.21})$$

Derivando novamente em  $x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right) \frac{\partial X}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial T} + \frac{\partial^2 V}{\partial T^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Agora derivando em função de  $t$  temos

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right) \left( \frac{\partial X}{\partial t} \right) = v_o \left( \frac{\partial V}{\partial T} - \frac{\partial V}{\partial X} \right) \quad (\text{D.23})$$

Derivando novamente em  $t$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) = v_o \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V}{\partial T} - \frac{\partial V}{\partial X} \right) = v_o \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} + \\ &+ v_o \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right) \frac{\partial X}{\partial t} - v_o \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right) \frac{\partial X}{\partial t} - v_o \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right) \frac{\partial T}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= v_o^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} - 2 \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial T} + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

Agora podemos retomar a equação do telegrafista e substituir as derivadas parciais em  $x$  e  $t$  pelas derivadas parciais nas novas variáveis,  $X$  e  $T$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - v_o^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= 0 \\ v_o^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} - 2 \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial T} + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) - v_o^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial T} + \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right) &= 0 \\ v_o^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) - \left( 2 \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial T} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial T} \right) \right] &= 0 \\ -4 v_o^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial T} &= 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial T} &= 0 \end{aligned}$$

Esta equação pode ser imediatamente integrada para obtermos uma solução geral, que é a soma das funções abstráreas  $f$  e  $g$

$$v = f(X) + g(T) = f(x - v_o t) + g(x + v_o t), \quad (\text{D.25})$$

que corresponde a propagação de ondas ao longo do eixo  $x$  em direções opostas, com mesma velocidade.





# APÊNDICE E – Ondas linearmente dispersivas

Alguns fenômenos dispersivos interessantes ocorrem quando a velocidade de fase e de grupo dependem do seu número onda (ou comprimento de onda). Em especial, diferentes componentes da onda viajam com velocidades diferentes ou uma dispersa da outra, veremos com detalhes esse efeito.

## E.1 Linhas de transmissão dispersiva

Agora iremos considerar ainda a linha de transmissão elétrica anterior com a adição de um indutor  $l_2$  por unidade de comprimento, em paralelo com o capacitor  $c$  como mostra a Fig.17.

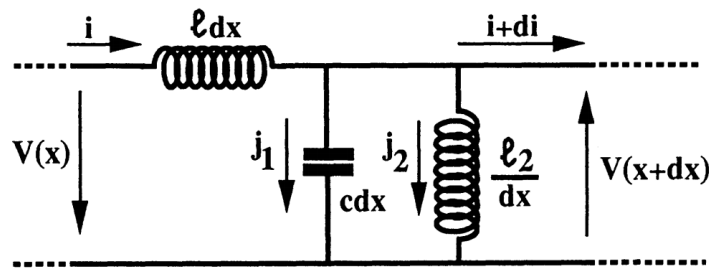


Figura 17 – Linha de transmissão elétrica dispersiva com uma indutância  $l_2$  em paralelo com capacitor  $c$  (REMOISSENET, 1999).

Com a adição de um indutor as equações de primeira ordem obtidas a partir da aplicação da lei de Kirchhoff, são alteradas quando comparada com as equações na linha de transmissão elétrica anterior, para a voltagem  $V(x)$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -l \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (\text{E.1})$$

e para a corrente  $i(x)$  é a soma das correntes,  $j_1$  e  $j_2$  que passam tanto no capacitor  $c$  como no indutor  $l_2$  respectivamente,

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -(j_1 + j_2). \quad (\text{E.2})$$

A corrente  $j_1$  que passa pelo capacitor  $c$  combinada com a equação (D.7) obtemos

$$j_1 = \frac{\partial q}{\partial t} dx = -c \frac{\partial V}{\partial t} dx, \quad (\text{E.3})$$

e da definição da tensão em um indutor linear, temos matematicamente

$$V = l \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{l_2}{dx} \frac{\partial j_2}{\partial t}. \quad (\text{E.4})$$

Aplicando a lei de Kirchhoff para uma linha de transmissão elétrica dispersiva como ilustrado na Fig.17, temos as seguintes equações diferenciais para a voltagem  $V(x)$ ,

$$\begin{aligned} V(x) - V(x + dx) &= dx \, l \frac{\partial i}{\partial t} \\ V(x) - \left[ V(x) + dx \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right] &= dx \, l \frac{\partial i}{\partial t} \\ -dx \frac{\partial V(x)}{\partial x} &= dx \, l \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x} &= -l \frac{\partial i}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

e para corrente  $i(x)$  temos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} i(x) - i(x + dx) &= \frac{\partial q}{\partial t} = (j_1 + j_2) \\ i(x) - \left[ i(x) + dx \frac{\partial i(x)}{\partial x} \right] &= (j_1 + j_2) \\ -dx \frac{\partial i(x)}{\partial x} &= (j_1 + j_2) \\ i(x) - i(x + dx) &= -\frac{(j_1 + j_2)}{dx} \end{aligned}$$

Tomando a derivada em função de  $x$  para a equação diferencial da voltagem  $V(x)$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -l \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right) = -l \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}. \quad (\text{E.6})$$

Retomando as equações para a corrente  $j_1$  que passa no capacitor  $c$  e a tensão no indutor  $l_2$

$$j_1 = -c \frac{\partial V}{\partial t} dx, \quad V = \frac{l_2}{dx} \frac{\partial j_2}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial j_2}{\partial t} = V \frac{dx}{l_2}, \quad (\text{E.7})$$

podemos escrever a derivada de segunda ordem em  $x$  e em  $t$  da corrente  $i$  como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial i}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{(j_1 + j_2)}{dx} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} &= -\frac{1}{dx} \left[ -c \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) dx + \frac{\partial j_2}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} &= -\frac{1}{dx} \left( c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} dx + V \frac{dx}{l_2} \right) \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} &= -c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{V}{l_2} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Combinando as equações (E.5) e (E.8) obtemos a equação de onda para uma linha de transmissão de linha elétrica dispersiva

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V}{\partial x} &= -l \frac{\partial i}{\partial t} \\
 -\frac{1}{l} \frac{\partial V}{\partial x} &= -c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{V}{l_2} \\
 \frac{1}{lc} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{V}{l_2 c} \\
 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \underbrace{\frac{1}{lc}}_{v_o^2} \frac{\partial V}{\partial x} + \underbrace{\frac{1}{l_2 c}}_{\omega_o^2} V &= 0 \\
 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - v_o^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \omega_o^2 V &= 0.
 \end{aligned} \tag{E.9}$$

As grandezas velocidade de propagação ( $v_o$ ) e ( $\omega_o$ ) são definidas como:

$$v_o^2 = \frac{1}{\sqrt{lc}}, \quad \omega_o^2 = \frac{1}{\sqrt{l_2 c}}. \tag{E.10}$$

A equação de segunda ordem obtida é denominada equação de **Klein-Gordon** e é dispersiva. De fato podemos mostrar que ela é dispersiva, assumindo que a voltagem é uma função senoidal:

$$V(x, t) = V_o \cos(kx - \omega t) = \text{Re}[e^{j(kx - \omega t)}] \tag{E.11}$$

inserindo (E.11) em (E.9), temos a relação de dispersão,

$$\frac{\partial^2 e^{j(kx - \omega t)}}{\partial t^2} - v_o^2 \frac{\partial^2 e^{j(kx - \omega t)}}{\partial x^2} + \omega_o^2 e^{j(kx - \omega t)} = 0 \tag{E.12}$$

$$-\omega^2 e^{j(kx - \omega t)} + k^2 v_o^2 e^{j(kx - \omega t)} + \omega_o^2 e^{j(kx - \omega t)} = 0 \tag{E.13}$$

$$-\omega^2 + k^2 v_o^2 + \omega_o^2 = 0 \tag{E.14}$$

$$\omega(k) = \sqrt{\omega_o^2 + k^2 v_o^2} \tag{E.15}$$

A relação de dispersão representada na Fig.18, para um  $k > 0$  como pode se observar na representação. Para  $k = 0$  isso implica em  $\omega = \omega_o$ , essa seria a frequência de corte - onde acima dessa frequência há propagação.

A velocidade de fase é definida como

$$v(k) = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{\omega_o^2 + k^2 v_o^2}}{k}, \tag{E.16}$$

daqui concluímos que há dispersão, já que a velocidade depende do número de onda  $k$ , como qualquer perturbação de acordo com o Teorema de Fourier pode ser decomposta em uma soma de senos e cossenos de diferentes comprimento de onda e velocidades, isso significa que para cada componente que compõe o pulso de onda viajará com uma velocidade e logo ao longo do tempo irão se dispersar uma em relação a outra. Na Fig.19 está representada a dispersão de um pulso de onda ao longo do tempo.

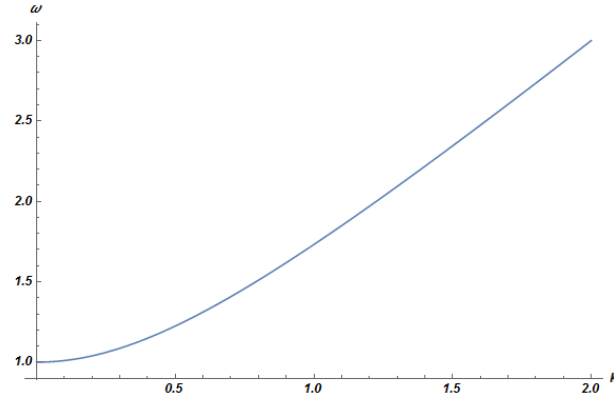


Figura 18 – Representação da relação de dispersão para  $k > 0$ .

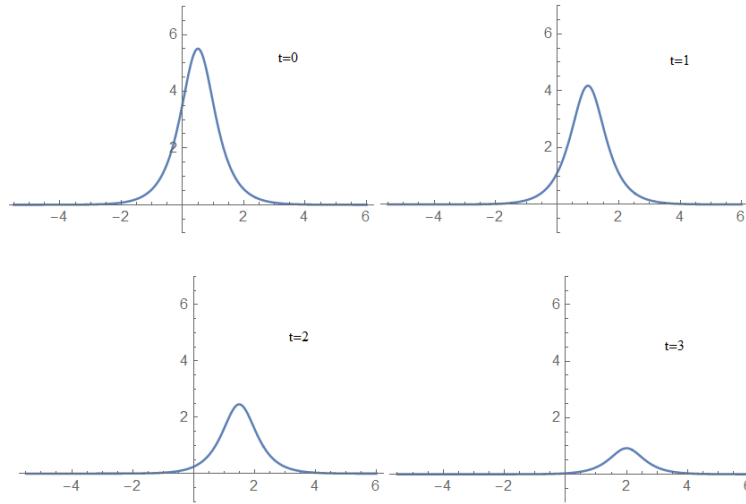


Figura 19 – Esquema de um pulso de onda que ao longo de sua propagação ocorre dispersão.

## E.2 Linhas de transmissão discreta

Agora iremos considerar uma linha de transmissão elétrica discreta, isto é, uma rede elétrica que é montada com componentes idênticos: indutores lineares  $L$  e capacitores lineares  $C$ , como pode ser visto na Fig. 20. Esta rede elétrica, com um número grande  $N$  de seções idênticas, é análoga a uma rede unidimensional de átomos.

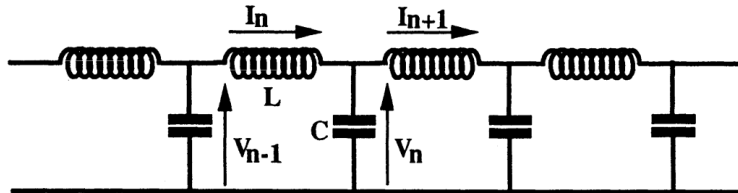


Figura 20 – Esquema de uma linha de transmissão elétrica discreta, [1].

Algumas aproximações são necessárias, a primeira é desconsiderar a pequena dissipação da voltagem e a falta de inhomogeneidade introduzida pelos componentes. Sendo  $I_n(t)$

a corrente que atravessa o  $n$ -ésimo indutor e  $V_n(t)$  a voltagem que atravessa o  $n$ -ésimo capacitor, pela lei de Kirchhoff obtemos:

$$V_{n-1} - V_n = \frac{d\Phi_n}{dt}, \quad I_n - I_{n-1} = \frac{dQ_n}{dt} \quad (\text{E.17})$$

onde o fluxo magnético total na  $n$ -ésima célula é  $\Phi_n$  e a carga total que passa na  $n$ -ésima célula é  $Q_n$  são:

$$\Phi_n = LI_n, \quad Q_n = CV_n. \quad (\text{E.18})$$

Combinando as equações (E.17) com (E.18) temos pela lei de Kirchhoff para uma unidade de seção  $LC$  as seguintes expressões,

$$V_{n-1} - V_n = L \frac{dI_n}{dt}, \quad (\text{E.19})$$

$$I_n - I_{n+1} = C \frac{dV_n}{dt}. \quad (\text{E.20})$$

Desenvolvendo a equação (E.19) para  $n + 1$ ,

$$\begin{aligned} V_{n-1} - V_n &= L \frac{dI_n}{dt} \\ V_{(n+1)-1} - V_{n+1} &= L \frac{dI_{n+1}}{dt} \\ V_n - V_{n+1} &= L \frac{dI_{n+1}}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Por outro lado desenvolvendo a equação (E.20) para  $n - 1$ ,

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+1} &= C \frac{dV_n}{dt} \\ I_{n-1} - I_{(n-1)+1} &= C \frac{dV_{n-1}}{dt} \\ I_{n-1} - I_n &= C \frac{dV_{n-1}}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

Subtraindo a equação (E.21) pela equação (E.20),

$$\begin{aligned} I_{n-1} - I_n - (I_n - I_{n+1}) &= C \frac{dV_{n-1}}{dt} - C \frac{dV_n}{dt} \\ I_{n-1} - 2I_n + I_{n+1} &= C \left[ \frac{dV_{n-1}}{dt} - \frac{dV_n}{dt} \right] \\ I_{n-1} - 2I_n + I_{n+1} &= C \frac{d}{dt} [V_{n-1} - CV_n] \\ I_{n-1} - 2I_n + I_{n+1} &= C \frac{d}{dt} \left[ L \frac{dI_n}{dt} \right] \\ I_{n-1} - 2I_n + I_{n+1} &= LC \frac{d^2 I_n}{dt^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

E subtraindo as equações (E.20) e (E.22) temos,

$$V_{n-1} - V_n - [V_n - V_{n+1}] = L \frac{dI_n}{dt} - L \frac{dI_{n+1}}{dt}$$

$$\begin{aligned}
V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1} &= L \left[ \frac{dI_n}{dt} - \frac{dI_{n+1}}{dt} \right] \\
V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1} &= L \frac{d}{dt} [I_n - dI_{n+1}] \\
V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1} &= L \frac{d}{dt} \left[ C \frac{dV_n}{dt} \right] \\
V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1} &= LC \frac{d^2 V_n}{dt^2}.
\end{aligned} \tag{E.24}$$

Agora considerando que a seguinte solução harmônica para a equação diferencial para voltagem discreta,

$$V_n(t) = V_o \operatorname{Re}[e^{j(\omega t - Kn)}] \tag{E.25}$$

com amplitude  $V_o$ . Assumindo expressões similares para  $V_{n+1}(t)$  e  $V_{n-1}(t)$ , que terão respectivamente,  $K_{n+1}$  e  $K_{n-1}$  ao invés de  $K_n$  na exponencial,

$$V_{n-1}(t) = V_o \operatorname{Re}[e^{j(\omega t - K_{n-1})}] , \quad V_{n+1}(t) = V_o \operatorname{Re}[e^{j(\omega t - K_{n+1})}]. \tag{E.26}$$

Na expressão da exponencial  $n$  assume o lugar de unidade de comprimento,  $n = \frac{x}{\delta}$ , onde  $\delta \ll 1$ , para indicar o comprimento de uma célula. E  $(\frac{K}{\delta}) = (\frac{2\pi}{\lambda}) = k$ , onde o comprimento de onda  $\lambda$ , é expressado em termos de unidades de células e a velocidade como unidades de células por segundo.

Substituindo as equações (E.25) e (E.26) em (E.24),

$$\begin{aligned}
V_o \frac{d^2 e^{j(\omega t - Kn)}}{dt^2} &= \frac{V_o}{LC} [e^{j(\omega t - K_{n-1})} - 2e^{j(\omega t - Kn)} + e^{j(\omega t - K_{n+1})}] \\
-\omega^2 &= \frac{e^{-jK} + e^{jK} - 2}{LC}.
\end{aligned} \tag{E.27}$$

Introdução  $\omega_c = 2(LC)^{-1/2}$ , obtemos a relação de dispersão pra modos dispersivos ou ondas que possam ser propagadas pela rede elétrica:

$$\begin{aligned}
-\omega^2 &= \frac{2\cos(K) - 2}{LC} \\
-\omega^2 &= \frac{2}{LC} [\cos(K) - 1] , \quad \operatorname{sen}\left(\frac{K}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cos(k) - 1}{2}} \\
\omega &= \omega_c \left| \operatorname{sen}\left(\frac{K}{2}\right) \right|
\end{aligned} \tag{E.28}$$

A velocidade de fase depende no modo considerado é dado por,

$$V(K) = \frac{\omega}{K} = \frac{\omega_c}{K} \left| \operatorname{sen}\left(\frac{K}{2}\right) \right|. \tag{E.29}$$

E a velocidade de grupo  $V_g$  é diferente da velocidade de fase e é dado por

$$V_g(K) = \frac{d\omega}{dK} = \frac{\omega_c}{K} \left| \operatorname{sen}\left(\frac{K}{2}\right) \right| \frac{dK/2}{dK} = \frac{\omega_c}{2} \left| \cos\left(\frac{K}{2}\right) \right|. \tag{E.30}$$

Em  $\pm\pi$  a velocidade de fase  $V(K)$  é máxima enquanto que a velocidade de grupo é zero. Neste caso ao contrário da linha anteriormente analisada, cuja a linha é contínua, a dispersão é espacial, que surge a partir do fato da linha ser discreta com seções  $LC$  repetidas.





## APÊNDICE F – Ondas não-lineares

A linha de transmissão elétrica que analisaremos agora representada na Fig.21, onde a amplitude da corrente e da tensão são altas e com isso os efeitos da não-linearidade devem ser levados em conta. Mas em geral esses efeitos são muito pequenos para serem observados.

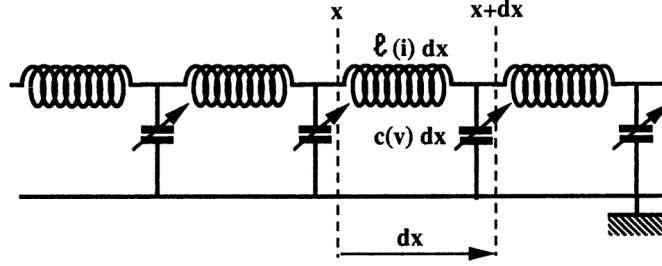


Figura 21 – Circuito elétrico não-linear equivalente a uma linha de transmissão com capacitância e indutância não-linear por unidade de comprimento  $dx$  (RE-MOISSENET, 1999).

Para darmos conta de observarmos esses efeitos é preferível adicionar elementos não-lineares na construção de uma linha de transmissão elétrica, como capacitâncias dependente da tensão aplicada e indutâncias dependente da corrente. Para simplificar nossa análise usaremos uma linha de transmissão em que a indutância por unidade de comprimento  $l$  é independente da corrente  $i$  e a capacitância por unidade  $c$  depende da tensão  $V$ .

Seguindo a mesma análise que fizemos com todas a linhas de transmissão até o momento, temos ao aplicarmos a lei de Kirchhoff para uma célula de comprimento  $dx$  as seguintes equações diferenciais de primeira ordem,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -l \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (\text{F.1})$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -c(V) \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (\text{F.2})$$

Para um elemento de capacitância dependente de uma dada voltagem  $V$ , que essa relação possa ser escrita como uma função polinomial

$$c(V) \approx c_o(1 + a_1V + a_2V^2 + a_3V^3 + \dots), \quad (\text{F.3})$$

Para uma tensão pequena podemos escrever a aproximação apenas pelos dois primeiros termos,

$$c(V) \approx c_o(1 + a_1V) = c_o(1 - 2bV), \quad (\text{F.4})$$

onde  $b$  é coeficiente não-linear. Admitindo como solução uma voltagem senoidal,

$$V = A \cos(\omega t - kx). \quad (\text{F.5})$$

Aplicando a solução na expressão (F.2),

$$\frac{\partial i}{\partial x} = A c_o \omega \sin(\omega t - kx) - A^2 b c_o \sin[2(\omega t - kx)] \quad (\text{F.6})$$

de onde surge uma segunda harmônica, isto é, o primeiro efeito da não-linearidade é criar harmônicas.

Resgatando da nossa análise sobre ondas lineares não-dispersivas, a velocidade de propagação (D.18) é,

$$v_o = \frac{1}{\sqrt{lc(V)}} = \frac{1}{\sqrt{lc_o(1 - 2bV)}} \approx \frac{1}{\sqrt{lc_o}}(1 + bV). \quad (\text{F.7})$$

Retomando as equações diferenciais e diferenciando (F.1) em relação a  $x$  e (F.2) em relação  $t$ ,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -l \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ c(V) \frac{\partial V}{\partial t} \right]. \quad (\text{F.8})$$

Combinando as equações (F.8) e (F.4) obtemos a equação de segunda ordem não-linear,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - lc_o \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + lc_o b \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{F.9})$$

que é a combinação da equação de onda livre mais um termo não-linear. Observando a expressão (F.7) espera-se que a equação diferencial de segunda ordem não-linear que obtemos descreve a dinâmica de uma onda que cuja a velocidade depende da tensão.

Qualitativamente um pulso de onda de tensão que se propaga pela linha de transmissão não-linear, viaja com diferentes velocidades para diferentes amplitudes do pulso, ou seja, a crista viaja com maior velocidade que a base, gerando descontinuidade, esta é outro efeito importante gerado pela não-linearidade.

## APÊNDICE G – Ondas em uma linha dispersiva e não-linear

Depois de analisarmos linhas de transmissão onde aparecem dispersão e não-linearidade isoladas, iremos agora considerar uma linha de transmissão discreta, de indutância por unidade de comprimento  $l$  independente da corrente e capacitância por unidade de comprimento  $c(V_n)$  em função da tensão  $V$ , como ilustra a Fig.22.

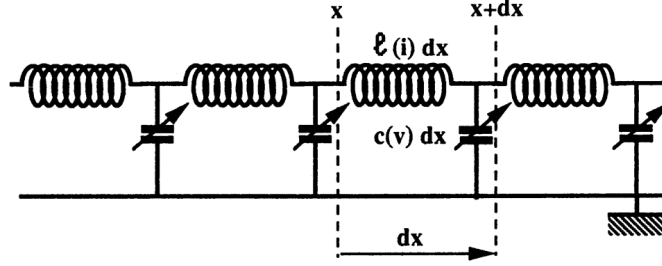


Figura 22 – Esquema de um circuito com indutância linear  $l$  e capacitância não-linear  $C(V_n)$  (REMOISSENET, 1999).

A capacitância  $C(V_n)$  não-linear em função da tensão  $V_n$  é dada por

$$C(V_n) = \frac{dQ_n(V_n)}{dV_n} \quad (\text{G.1})$$

onde  $Q_n(V_n)$  é a carga armazenada no  $n$ -ésimo capacitor. A indutância é independente da corrente e é continua sendo expressa como,  $d\Phi_n = l dI_n$ . Seguindo a sistemática de análise empregada no tópico sobre uma linha discreta dispersiva, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{d^2 Q_n}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[ c(V_n) \frac{dV_n}{dt} \right] = \frac{1}{l} (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{G.2})$$

que combinada com a aproximação polinomial para capacitância em (F.4) obtemos a seguinte expressão,

$$lc_o \frac{d^2 V_n}{dt^2} - lc_o b \frac{d^2 V_n^2}{dt^2} = (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{G.3})$$

essa equação discreta não-linear não possui solução analítica, mas pode ser obtida por métodos numéricos. Temos assim uma solução aproximada num limite contínuo e  $x = n\delta$ ,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \left( \frac{\delta^2}{lc_o} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \left( \frac{\delta^4}{12lc_o} \right) \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + b \frac{\partial^2 V^2}{\partial t^2}. \quad (\text{G.4})$$

A equação (G.4) descreve no seu lado esquerdo da igualdade um termo igual a equação de onda livre e do lado direito da igualdade a soma de uma termo dispersivo com um termo

não-linear. A dispersão se deve ao fato da linha ser discreta e causa um alargamento da base do pulso de onda e conseqüentemente a diminuição da amplitude. E a não-linearidade devido à capacitância não-linear encurta a base do pulso de onda e aumenta a amplitude. A combinação desses dois efeitos se balanceia, produzem sólitons, pulsos de onda que se propagam velocidade e perfil constante.

## APÊNDICE H – Equação diferencial do fluxon

Aplicando a lei de Kirchhoff no circuito equivalente da junção Josephson longa, como ilustra a Fig.10 obtemos as seguintes equações diferenciais,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -l \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (\text{H.1})$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -c \frac{\partial V}{\partial t} - J_C \text{sen}\phi, \quad (\text{H.2})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = V \quad (\text{H.3})$$

Derivando (H.3) em relação em  $x$  e combinando com (H.1) temos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial V}{\partial x} = -l \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (\text{H.4})$$

Tomando a derivada em relação a  $x$  da equação (H.4) e combinando com a equação (H.2) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) &= -l \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) &= -l \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial i}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( lc \frac{\partial V}{\partial t} + l J_C \text{sen}\phi \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( lc \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + l J_C \text{sen}\phi \right) \\ \int \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) dt &= \int \frac{\partial}{\partial t} \left( lc \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + l J_C \text{sen}\phi \right) dt \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + C_1 &= lc \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + l J_C \text{sen}\phi + C_2 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - lc \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - l J_C \text{sen}\phi + C_1 - C_2 &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - lc \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - l J_C \text{sen}\phi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

A equação (H.5) é a equação do diferencial em termos do fluxo magnético, que está relacionado com a fase quântica dos pares de Cooper pela equação (3.8), portanto podemos reescrever a equação em termos da fase,

$$\frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - lc \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - l J_C \text{sen}\phi = 0$$

$$\begin{aligned}
-lc \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + l J_C \sin \phi \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{1}{lc} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{l\Phi_0}{2\pi} \frac{1}{lc} J_C \sin \phi \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= c_j^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \omega_J^2 J_C \sin \phi \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_j^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \omega_J^2 J_C \sin \phi &= 0
\end{aligned} \tag{H.6}$$

onde  $c_J$  é a velocidade de onda linear e  $\omega_J$  a frequência de plasma Josephson. A equação (H.6) é a equação de Sine-Gordon.